Classificazione di una conica non degenere

Una forma quadratica in x e y si puó scrivere come $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = (x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Dunque $A = A^T$, cioè A è una matrice simmetrica. Affinchè la forma sia effettivamente di grado 2, a_{11}, a_{22}, a_{12} non devono essere tutti nulli, quindi la sottomatrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ deve essere diversa dalla matrice nulla. L'insieme delle soluzioni dell' equazione $(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ viene detta *conica*. Vediamo ora di capire che tipo di conica rappresenta tale equazione mediante lo studio delle matrici A ed A_1.

Enunciamo il seguente Teorema senza dimostrazione.

Teorema La conica di equazione $(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ è non degenere se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Quindi ora procediamo con la classificazione assumendo che $\det(A) \neq 0$.

La matrice A_1 è simmetrica quindi ortogonalmente diagonalizzabile: esiste una matrice ortogonale P tale che $A_1 = PDP^{-1}$, con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che, poichè P è ortogonale, $P^{-1} = P^T$, e λ_1 e λ_2 sono i due autovalori di A_1. Sia $Q = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{P}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{P^{-1}}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{P^T}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^T$. Sia $Ox'y'$ il sistema di rifermento tale che $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, e dunque $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice $B = QAQ^{-1}$ allora rappresenta la forma quadratica nel sistema di riferimento $Ox'y'$, poichè $(x', y', 1)QAQ^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (Q^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix})^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (Q^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix})^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix})^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi $(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x', y', 1)B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. La matrice B è simmetrica, in quanto $B = QAQ^{-1} = QAQ^T$ e $B^T = (QAQ^T)^T = QA^TQ^T = QAQ^T$, quindi $B = B^T$. Dunque possiamo scrivere $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$.

Nel nuovo sistema di riferimento abbiamo quindi l'equazione:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_3 = 0.$$

Caso 1: λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$.

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_3 = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x') + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y') + b_3 = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x' + \frac{b_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{b_1^2}{\lambda_1^2}) + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y' + \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{b_2^2}{\lambda_2^2}) + b_3 = \lambda_1(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3 = \lambda_1(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + c = 0$, ove $c = -\frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3$. Quindi, effettuando un nuovo cambiamento di riferimento (in questo caso una traslazione), si ha $\begin{cases} X = x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ Y = y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$ e l'equazione diventa: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + c = 0$. Si noti che $c = \frac{\det(B)}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\det(B)}{\lambda_1\lambda_2}$ poichè A e B sono simili. Dunque $c \neq 0$.

Possiamo dividere per c e otteniamo: $\frac{\lambda_1}{c}X^2 + \frac{\lambda_2}{c}Y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (-\frac{\lambda_1}{c})X^2 + (-\frac{\lambda_2}{c})Y^2 = 1$.

Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono concordi e < 0, allora possiamo porre $\frac{1}{a^2} = \frac{\lambda_1}{c}$ e $\frac{1}{b^2} = \frac{\lambda_2}{c}$ e dunque ottenere $-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ che è un'ellisse con soli punti immaginari (cioè non ha punti in $\mathbb{R}^2$). Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono concordi e > 0, allora possiamo porre $\frac{1}{a^2} = -\frac{\lambda_1}{c}$ e $\frac{1}{b^2} = -\frac{\lambda_2}{c}$ e dunque $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ cioè un'ellisse. Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono discordi, ad esempio $-\frac{\lambda_1}{c} > 0$ e $-\frac{\lambda_2}{c} < 0$, possiamo porre $-\frac{\lambda_1}{c} = \frac{1}{a^2}$ e $-\frac{\lambda_2}{c} = -\frac{1}{b^2}$, quindi ottenere $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, cioè un'iperbole.

Caso 2: uno solo degli autovalori è 0. Supponiamo $\lambda_1 = 0$ Si ha

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_3 = 0.$$

Si noti che allora $\det(A) = \det(B) = \lambda_2 b_1^2$ dunque, poichè $\det(A) \neq 0$, si ha $b_1 \neq 0$. Possiamo allora dividere per b_1 e quindi ottenere la parabola di equazione $x' = -\frac{\lambda_2}{2b_1}y'^2 - \frac{b_2}{b_1}y' - \frac{b_3}{2b_1}$.

Analogamente, se $\lambda_2 = 0$, si ha $\neq b_2$, e otteniamo la parabola di equazione $y' = -\frac{\lambda_1}{2b_2}x'^2 - \frac{b_1}{b_2}x' - \frac{b_3}{2b_2}$.

Caso 3: entrambi gli autovalori sono $= 0$.

In questo caso si avrebbe $\det(A) = \det(B) = 0$, contraddicendo le ipotesi.

Riassumendo si ha:

- un'ellisse se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ sono concordi. Inoltre ho un'ellisse reale se c è discorde con essi, mentre ho un'ellisse con soli punti immaginari se c è concorde con gli autovalori.
- un'iperbole se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ sono discordi e $c \neq 0$.
- una parabola se λ_1 o $\lambda_2 = 0$.

Vediamo come possiamo ricavare queste informazioni dalle matrici A ed A_1. λ_1 e λ_2 sono concordi se e solo se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, sono discordi se e solo se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e uno degli autovalori è nullo se e solo se $\lambda_1\lambda_2 = 0$. La matrice A_1 è diagonalizzabile, cioè simile alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dunque $\lambda_1\lambda_2 = \det(A_1)$. Inoltre, λ_1 e λ_2 sono entrambi concordi con c se e solo se $c\lambda_1 > 0$ e $c\lambda_2 > 0$, quindi $c(\lambda_1 + \lambda_2) > 0$. Ancora una volta, A_1 e D sono simili, dunque hanno la stessa traccia, cioè $Tr(A_1) = \lambda_1 + \lambda_2$. Quindi λ_1 e λ_2 sono entrambi concordi con c se e solo se $\det(A)Tr(A_1) > 0$.

Quindi si ha:

- un'ellisse se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) > 0$. L'ellisse è reale se $Tr(A_1)\det(A) < 0$, non ha punti reali se $Tr(A_1)\det(A) > 0$
- un'iperbole se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) < 0$.
- una parabola se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) = 0$.