Autovalori, autovettori, diagonalizzazione

Esercizio1:
Quali sono gli autovalori e autovettori della matrice identità I_n?

Esercizio2:
Trovare gli autovalori delle seguenti matrici:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$

Esercizio3:
Trovare una base per ogni autospazio associato alla matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Esercizio4:
Determinare gli autovalori e una base per gli autospazi delle seguenti matrici:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio5:
Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e, se lo sono, determinare la matrice P che le diagonalizza:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio6: Sia $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4, -x_2 + x_3 + 3x_4, -7x_3 + 8x_4, 2x_3 - 7x_4)$. Determinare gli autovalori e gli autospazi di L.

Esercizio7:
Dimostrare che $L : V \longrightarrow V$ è un isomorfismo se e solo se L non ha autovalori nulli.

Soluzioni

2) a) $\lambda = 1, 2$.

b) Non ha autovalori.

c) $\lambda = 4, 2 \pm \sqrt{3}$.

3) Gli autovalori della matrice sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$. Una base per V_1 è $\{(1, 1, 0)\}$, una base per V_5 è $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

4) a) Gli autovalori sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$. Una base per V_{-2} è $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, una base per V_4 è $\{(1, 1, 2)\}$.

b) Gli autovalori sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$. Una base per V_{-2} è $\{(1, 1, 0)\}$, una base per V_4 è $\{(0, 1, 1)\}$.

5) a) Non è diagonalizzabile.

b) La matrice è la stessa dell'Esercizio 4.a), dunque è diagonalizzabile e P si ottiene mettendo come vettori colonna i vettori di una base di V_{-2} e i vettori di una base di V_4.

c) La matrice è la stessa dell'Esercizio 4.b), dunque non è diagonalizzabile.

6) Gli autovalori sono 1,-1,-11,3. Gli autospazi: $V_1 = \langle(1, 0, 0, 0)\rangle$, $V_{-1} = \langle(1, -1, 0, 0)\rangle$, $V_{-11} = \langle(-19, 19, 40, 50)\rangle$, $V_3 = \langle(-3, 1, -8, 4)\rangle$.