

Esempio di Prova di Esame 2

Domande:

1. Dare un esempio di funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ iniettiva, con n e m a vostra scelta.
2. Nello spazio di polinomi di grado al più 3, sia U il sottospazio dei polinomi che si annullano in 1. Dire qual è la dimensione di U .
3. Date due matrici A e B per cui il prodotto AB è definito. Se $AB = O$, allora $A = O$ o $B = O$? Se la risposta è sì, giustificare, se la risposta è no, dare un controesempio.
4. Esiste un insieme ortogonale di \mathbb{R}^3 di cardinalità 4? In caso di risposta affermativa, dare un esempio, in caso di risposta negativa dire perché.
5. Dato il piano $\pi : 2x - y + 3z = 0$, scrivere due vettori indipendenti paralleli al piano e un vettore ortogonale ad esso.

Esercizi:

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. a) Trovare il luogo dei punti a distanza 1 dal piano $\pi : x - y + 2z = 0$
b) Classificare la seguente conica al variare del parametro λ :

$$\lambda x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

2. a) Dire quali sono le matrici ortogonalmente diagonalizzabili.
b) Diagonalizzare ortogonalmente la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se non si ricorda la diagonalizzazione ortogonale, procedere con quella ordinaria.

3. Sia $V = \langle (1, 2, 0, 0), (0, -1, -1, 1) \rangle$.
a) Trovare il sistema che ha V come soluzione.
b) Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $V = \text{Ker} f$, $f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 3)$ e $f(0, 0, 1, 0) = (4, 3, 7)$. Trovare $f(3, 2, 1, 1)$.

Soluzioni

Risposte alle domande:

1. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x, x - 2y, 2y - z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Un polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ si annulla in 1 se $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, dunque $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$ e a_1, a_2, a_3 sono variabili libere, quindi $\dim U = 3$.
3. Non è detto che una delle due matrici sia nulla, ad esempio: se $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $AB = O$.
4. Vettori non nulli a due a due ortogonali sono indipendenti, quindi un insieme ortogonale di vettori non nulli di \mathbb{R}^3 ha cardinalità al più 3. Dunque, per ottenere un insieme con 4 elementi a due a due ortogonali dobbiamo includere lo $\underline{0}$. Un esempio è $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
5. Un vettore ortogonale è il vettore $(a, b, c) = (2, -1, 3)$. Due vettori paralleli al piano non dipendenti fra loro sono $(1, 2, 0)$ e $(0, 3, 1)$ (basta prendere due vettori ortogonali ad (a, b, c)).

Svolgimento degli esercizi:

1. a) Il punto $P = (x, y, z)$ ha distanza 1 da π se $d(P, \pi) = \frac{|x-y+2z|}{\sqrt{1+1+4}} = 1$, quindi $x - y + 2z = \pm\sqrt{6}$. I punti sono tutti e soli quelli dei piani: $x - y + 2z + \sqrt{6} = 0$ e $x - y + 2z - \sqrt{6} = 0$.
b) La matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -2 \\ \lambda & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\det A = 3\lambda - 4$, quindi la conica è non degenera se $\lambda \neq \frac{4}{3}$.

Sia $A' = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, quindi $\det A' = \lambda - \lambda^2$.

La conica è un'ellisse per $\det A' > 0$, quindi per $\lambda \in]0, 1[$. Inoltre, l'ellisse è reale se $\text{Tr}(A') \det A < 0$, quindi $\forall \lambda \in]0, 1[$.

La conica è una parabola per $\det A' = 0$, quindi per $\lambda = 0, 1$.

La conica è un'iperbole per $\det A' < 0$, quindi per $\lambda < 0$ e per $\lambda > 1$ con $\lambda \neq \frac{4}{3}$.

2. a) Le uniche matrici ortogonalmente diagonalizzabili sono le matrici simmetriche.
b) Il polinomio caratteristico di A è $(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$, dunque gli autovalori sono $\lambda = 1, -1, 2$

e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Gli autospazi sono: $V_1 = \langle (1, 0, -1) \rangle$, $V_{-1} = \langle (1, -2, 1) \rangle$,

$V_2 = \langle (1, 1, 1) \rangle$. Poiché la matrice A è simmetrica, vettori appartenenti ad autospazi distinti sono sicuramente ortogonali. Quindi, in ogni autospazio, bisogna trovare gli

autovettori di norma 1. Quindi $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

3. a) Il vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ se $\rho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2$. Si ha che $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, quindi, applicando il teorema degli orlati a tale minore, la matrice ha rango 2 se gli orlati di tale minore sono uguali a 0. Quindi si ottiene $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = -2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} = -2x_1 + x_2 + x_4 = 0$. Quindi il sistema é:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

b) Poiché $V = \text{Ker} f$, si ha che $f(1, 2, 0, 0) = f(0, -1, -1, 1) = (0, 0, 0)$. Si osserva che $\{(1, 2, 0, 0), (0, -1, -1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ é una base per \mathbb{R}^4 , quindi si può scrivere $(3, 2, 1, 1)$ come combinazione lineari di tali vettori. Da $(3, 2, 1, 1) = h_1(1, 2, 0, 0) + h_2(0, -1, -1, 1) + h_3(1, 1, 0, 0) + h_4(0, 0, 1, 0) = (h_1 + h_3, 2h_1 - h_2 + h_3, -h_2 + h_4, h_2)$, si ricava, risolvendo il sistema associato, $h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 0, h_4 = 2$. Quindi $f(3, 2, 1, 1) = f(0, -1, -1, 1) + 3f(1, 1, 0, 0) + 2f(0, 0, 1, 0) = 3(0, 1, 3) + 2(4, 3, 7) = (8, 9, 23)$.