Esempio di Prova di Esame 2

Domande:

1. Dare un esempio di funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ iniettiva, con n e m a vostra scelta.
2. Date due matrici A e B per cui il prodotto AB è definito. Se $AB = O$, allora $A = O$ o $B = O$? Se la risposta è sì, giustificare, se la risposta è no, dare un controesempio.
3. Esiste un insieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 4? In caso di risposta affermativa, dare un esempio, in caso di risposta negativa dire perché.

Esercizi:

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. **a)** Trovare il luogo dei punti a distanza 1 dal piano $\pi : x - y + 2z = 0$

   b) Classificare la seguente conica al variare del parametro λ:
   $$\lambda x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

2. **a)** Dire quali sono le matrici ortogonalmente diagonalizzabili.

   b) Diagonalizzare ortogonalmente la seguente matrice:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Se non si ricorda la diagonalizzazione ortogonale, procedere con quella ordinaria.

3. **a)** Sia $V = \langle (1, 2, 0, 0), (0, -1, -1, 1) \rangle$. Trovare il sistema che ha V come soluzione.

   b) Nello spazio di polinomi di grado al più 3, sia U il sottospazio dei polinomi che si annullano in 1. Dire qual è la dimensione di U.

4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $V = Kerf$ (dove V è definito nell'esercizio precedente), $f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 3)$ e $f(0, 0, 1, 0) = (4, 3, 7)$. Trovare $f(3, 2, 1, 1)$ e $f^{-1}(4, 2, 4)$.

Soluzioni

Risposte alle domande:

1. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x, x - 2y, 2y - z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Non è detto che una delle due matrici sia nulla, ad esempio: se $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $AB = O$.

3. Vettori non nulli a due a due ortogonali sono indipendenti, quindi un insieme ortogonale di vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$ ha cardinalità al più 3. Dunque, per ottenere un insieme con 4 elementi a due a due ortogonali dobbiamo includere lo $\underline{0}$. Un esempio é $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Svolgimento degli esercizi:

1. **a)** Il punto $P = (x, y, z)$ ha distanza 1 da π se $d(P, \pi) = \frac{|x-y+2z|}{\sqrt{1+1+4}} = 1$, quindi $x - y + 2z = \pm\sqrt{6}$. I punti sono tutti e soli quelli dei piani: $x-y+2z+\sqrt{6} = 0$ e $x-y+2z-0\sqrt{6} = 0$.

   b) La matrice associata alla conica é:
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -2 \\ \lambda & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Si ha che $\det A = 3\lambda - 4$, quindi la conica é non degenere se $\lambda \neq \frac{4}{3}$.
   Sia $A' = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, quindi $\det A' = \lambda - \lambda^2$.
   La conica é un'ellisse per $\det A' > 0$, quindi per $\lambda \in]0, 1[$. Inoltre, l'ellisse é reale se $Tr(A') \det A < 0$, quindi $\forall \lambda \in]0, 1[$.
   La conica é una parabola per $\det A' = 0$, quindi per $\lambda = 0, 1$.
   La conica é un'iperbole per $\det A' < 0$, quindi per $\lambda < 0$ e per $\lambda > 1$ con $\lambda \neq \frac{4}{3}$.

2. **a)** Le uniche matrici ortogonalmente diagonalizzabili sono le matrici simmetriche.

   b) Il polinomio caratteristico di A é $(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$, dunque gli autovalori sono $\lambda = 1, -1, 2$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Gli autospazi sono: $V_1 = \langle(1, 0, -1)\rangle$, $V_{-1} = \langle(1, -2, 1)\rangle$, $V_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$. Poichè la matrice A é simmetrica, vettori appartenenti ad autospazi distinti sono sicuramente ortogonali. Quindi, in ogni autospazio, bisogna trovare gli autovettori di norma 1. Qundi $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

3. **a)** Il vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ se $\rho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2$. Si ha che $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, quindi, applicando il teorema degli orlati a tale minore, la matrice ha rango 2 se gli orlati di tale minore sono uguali a 0. Quindi si ottiene $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} =$

$-2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} = -2x_1 + x_2 + x_4 = 0$. Quindi il sistema é:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

b) Un polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ si annulla in 1 se $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, dunque $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$ e a_1, a_2, a_3 sono variabili libere, cioè $U = \{-a_1 - a_2 - a_3 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ e quindi $\dim U = 3$.

4. Poiché $V = Kerf$, si ha che $f(1,2,0,0) = f(0,-1,-1,1) = (0,0,0)$. Si osserva che $B = \{(1,2,0,0), (0,-1,-1,1), (1,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ é una base per $\mathbb{R}^4$, quind la matrice A che rappresenta f rispetto alla base ordinata B di $\mathbb{R}^4$ e la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Per trovare $f(3,2,1,1)$, si devono trovare le componenti di $(3,2,1,1)$ rispetto a B. Da $(3,2,1,1) = h_1(1,2,0,0) + h_2(0,-1,-1,1) + h_3(1,1,0,0) + h_4(0,0,1,0) = (h_1 + h_3, 2h_1 - h_2 + h_3, -h_2 + h_4, h_2)$, si ricava, risolvendo il sistema associato, $h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 0, h_4 = 2$. Quindi $f(3,2,1,1) = A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}$.

Per trovare $f^{-1}(4,2,4)$, è necessario prima risolvere il sistema $A\underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, dunque:

$$\begin{cases} 4x_4 = 4 \\ x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 + 3 = 2 \\ 3x_3 + 7 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$$

Quindi le *componenti* di $f^{-1}(4,2,4)$ rispetto a B sono $\{(x_1, x_2, -1, 1), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ e $f^{-1}(4,2,4) = \{x_1(1,2,0,0) + x_2(0,-1,-1,1) - (1,1,0,0) + (0,0,1,0) = (x_1 - 1, 2x_1 - x_2 - 1, -x_2 + 1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.