

Esempio di Prova di Esame 3

Domande:

1. Sia A una matrice $m \times n$, $\underline{\mathbf{x}}$ il vettore delle incognite in \mathbb{R}^n . Dire sotto quali ipotesi $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ è risolubile per ogni vettore $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$ dei termini noti.
2. Stabilire la dimensione ed una base dello spazio delle matrici simmetriche di ordine 3.
3. Una matrice con un autovalore nullo è invertibile? Motivare la risposta.
4. Determinare la dimensione del nucleo della funzione lineare $f : V \rightarrow V$, con V spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3\}$, tale che $f(v_1) = v_1 - v_2$, $f(v_2) = 2v_1 - v_2 - v_3$, $f(v_3) = v_1 - v_3$.
5. Due piani nello spazio si possono intersecare in un unico punto? Motivare la risposta.

Esercizi:

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. a) Trovare la distanza fra le rette $r : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - z = -9 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$.
b) Trovare il piano per $P = (3 - 2, 1)$, $Q = (0, 1, 1)$ e ortogonale a $\pi : 2x - y + 4z - 1 = 0$
c) Classificare la conica di equazione: $x^2 + y^2 + 6xy - 2x + 2y = 0$.
2. Diagonalizzare ortogonalmente quelle tra le seguenti matrici per cui è possibile farlo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato da $\{(1, 3, 1, 0), (0, 0, -1, 1), (0, 2, 1, 0)\}$ e sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + 2x_4 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base per: $V \cap W$ e completare tale base ad una base di \mathbb{R}^4 .

Soluzioni

Risposte alle domande:

1. Il sistema è risolubile se $\rho(A) = \rho(A, \underline{\mathbf{b}})$. In genere, $\rho(A) \leq \rho(A, \underline{\mathbf{b}})$. Per avere $\rho(A) = \rho(A, \underline{\mathbf{b}}) \forall \underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$, bisogna che $\rho(A)$ sia uguale al massimo rango per $(A, \underline{\mathbf{b}})$ (e quindi non si può avere $\rho(A) < \rho(A, \underline{\mathbf{b}})$). Se $m \leq n$, allora il sistema è sempre risolubile se $\rho(A) = m$, in quanto m è il massimo rango per $(A, \underline{\mathbf{b}})$. Se $m \geq n + 1$, allora il massimo rango per $(A, \underline{\mathbf{b}})$ è $n + 1$, ma la matrice A non può avere quel rango. Quindi il sistema è sempre risolubile $\forall \underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$ se $m \leq n$ e $\rho(A) = m$.

2. Le matrici simmetriche di ordine 3 sono le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ con $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$. Le variabili libere sono 6, dunque lo spazio ha dimensione 6. Una possibile base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Una matrice quadrata A ha un autovalore uguale a 0 se e solo se $\det A = 0$, quindi la matrice non è invertibile.

4. La matrice associata ad f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha rango 2, quindi la dimensione del nucleo è $3-2=1$.

5. Un piano nello spazio è l'insieme dei punti le cui coordinate sono soluzioni di un'equazione lineare. Dunque per trovare l'intersezione di due piani, bisogna trovare le soluzioni di un sistema con due equazioni e 3 incognite. Tale sistema non può essere mai determinato, quindi non si può avere un'unica soluzione, quindi un unico punto.

Svoglimento esercizi:

1. **a)** Bisogna verificare la posizione reciproca delle due rette. Le due rette sono parallele, infatti, per entrambe, un vettore direzionale è $(-1, 3, -2)$. Inoltre, sono distinte, in quanto il punto di s $P = (0, 2, -1)$ (che si ottiene ponendo $t = 0$) non soddisfa nessuna delle equazioni di r . Dunque possiamo procedere a trovare la distanza tra le rette. Devo trovare un punto Q su r in maniera tale che il vettore \overrightarrow{PQ} sia ortogonale alle rette, così avremo che $d(r, s) = \overline{PQ}$. Il generico punto di r si ottiene mettendo r in forma parametrica. Si ha $r : \begin{cases} x = h \\ y = -3h - 3 \\ z = 2h + 9 \end{cases}$, quindi $\overrightarrow{PQ} = (h, -5h - 3, 2h + 10)$. Allora \overrightarrow{PQ} è ortogonale alle rette se $(h, -5h - 3, 2h + 10) \cdot (-1, 3, -2) = -20h - 29 = 0$, quindi per $h = -\frac{29}{20}$ e $\overrightarrow{PQ} = (-\frac{29}{20}, \frac{17}{4}, \frac{71}{10})$. Quindi $d(r, s) = \overline{PQ} = \sqrt{(\frac{29}{20})^2 + (\frac{17}{4})^2 + (\frac{71}{10})^2}$.
- b)** Il piano cercato si può facilmente scrivere in forma parametrica, in quanto abbiamo un punto di passaggio (possiamo scegliere P o Q) e due vettori direzionali (indipendenti!): il vettore $\overrightarrow{PQ} = 3(-1, 1, 0)$ (quindi possiamo prendere $(-1, 1, 0)$) e il vettore normale di π , cioè $(2, -1, 4)$.

c) La matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Dunque $\det(A) = -8 \neq 0$, $\det(A_1) = -8 < 0$ e la conica è un'iperbole.

2. Le uniche matrici ad essere ortogonalmente diagonalizzabili sono le matrici simmetriche, quindi, in questo caso, le matrici A e B . In realtà la matrice A è già diagonale, quindi non c'è nulla da fare. Quindi dobbiamo diagonalizzare solo la matrice B . $\det(B - \lambda I_3) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$, quindi abbiamo $\lambda = -1$ con molteplicità 2 e $\lambda = 2$ con molteplicità 1. Da $\lambda = -1$ si ottiene il sistema $(B + I_3)\underline{x} = \underline{0}$, cioè $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Una base per l'autospazio è allora $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$. Per ottenere una base ortonormale dell'autospazio, dobbiamo applicare Gram-Schmidt. Si ottiene $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, per ottenere v_2 , si fa prima $(0, 1, -1) - ((0, 1, -1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0))(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (0, 1, -1) - (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Poi si normalizza quest'ultimo vettore e si ottiene $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$. Dunque una base ortonormale per l'autospazio associato a -1 è $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})\}$. Da $\lambda = 2$ otteniamo il sistema $(B - 2I_3)\underline{x} = \underline{0}$, cioè $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. Il sistema ha ∞^1 soluzioni ed una soluzione non nulla è $(1, 1, 1)$, che normalizzato diventa $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Dunque si ha $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

3. Si osserva che il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è 3, quindi $\dim V = 3$. Visto che V è un sottospazio di \mathbb{R}^4 , esso è definito da $4 - 3 = 1$ equazioni. Per trovare l'equazione che definisce V bisogna imporre $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0$. Si ottiene $-x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$. Per trovare una base per $W \cap V$, bisogna risolvere il sistema formato dalle equazioni che definiscono gli spazi, dunque $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. L'insieme delle soluzioni è $\{(-4x_4 - 2x_3, -2x_4, x_3, x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$, quindi sono ∞^2 e $\dim V \cap W = 2$. Una base è $\{(-2, 0, 1, 0), (-4, -2, 0, 1)\}$. Per completare tale insieme ad una base di \mathbb{R}^4 , dobbiamo aggiungere altri 2 vettori in maniera tale che l'insieme così ottenuto risulti linearmente indipendente. Nella matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il minore $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, e la sottomatrice occupa la terza e quarta colonna, quindi per ottenere un insieme indipendente basta aggiungere i due vettori della base canonica che hanno 1 nella prima e seconda colonna. Quindi una possibile base di \mathbb{R}^4 che contiene la base di $V \cap W$ è $\{(-2, 0, 1, 0), (-4, -2, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$.