Esempio di Prova di Esame 3

Domande:

1. Sia A una matrice $m \times n$, $\underline{\mathbf{x}}$ il vettore delle incognite in $\mathbb{R}^n$. Dire sotto quali ipotesi $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ è risolubile per ogni vettore $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ dei termini noti.
2. Una matrice con un autovalore nullo è invertibile? Motivare la risposta.
3. Due piani nello spazio si possono intersecare in un unico punto? Motivare la risposta.

Esercizi:

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. a) Trovare la distanza fra le rette $r : \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-z=-9 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x=-t \\ y=2+3t \\ z=-1-2t \end{cases}$.

   b) Trovare il piano per $P = (3-2,1), Q = (0,1,1)$ e ortogonale a $\pi : 2x - y + 4z - 1 = 0$

2. Diagonalizzare ortogonalmente quelle tra le seguenti matrici per cui è possibile farlo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $\{(1,3,1,0),(0,0,-1,1),(0,2,1,0)\}$ e sia $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_2 + 2x_4 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base per: $V \cap W$ e completare tale base ad una base di $\mathbb{R}^4$.

4. Determinare la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine della funzione lineare $f : V \to V$, con V spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3\}$, tale che $f(v_1) = v_1 - v_2$, $f(v_2) = 2v_1 - v_2 - v_3$, $f(v_3) = v_1 - v_3$.

Soluzioni
Risposte alle domande:

1. Il sistema è risolubile se $\rho(A) = \rho(A, \underline{\mathbf{b}})$. In genere, $\rho(A) \leq \rho(A, \underline{\mathbf{b}})$. Per avere $\rho(A) = \rho(A, \underline{\mathbf{b}})$ $\forall\, \underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$, bisogna che $\rho(A)$ sia uguale al massimo rango per $(A, \underline{\mathbf{b}})$ (e quindi non si può avere $\rho(A) < \rho(A, \underline{\mathbf{b}})$). Se $m \leq n$, allora il sistema è sempre risolubile se $\rho(A) = m$, in quanto m è il massimo rango per $(A, \underline{\mathbf{b}})$. Se $m \geq n+1$, allora il massimo rango per $(A, \underline{\mathbf{b}})$ è $n+1$, ma la matrice A non può avere quel rango. Quindi il sistema è sempre risolubile $\forall\, \underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$ se $m \leq n$ e $\rho(A) = m$.

2. Una matrice quadrata A ha un autovalore uguale a 0 se e solo se $\det A = 0$, quindi la matrice non è invertibile.

3. Un piano nello spazio è l'insieme dei punti le cui coordinate sono soluzioni di un'equazione lineare. Dunque per trovare l'intersezione di due piani, bisogna trovare le soluzioni di un sistema con due equazioni e 3 incognite. Tale sistema non può essere mai determinato, quindi non si può avere un'unica soluzione, quindi un unico punto.

Svoglimento esercizi:

1. **a)** Bisogna verificare la posizione reciproca delle due rette. Le due rette sono parallele, infatti, per entrambe, un vettore direzionale è $(-1, 3, -2)$. Inoltre, sono distinte, in quanto il punto di s $P = (0, 2, -1)$ (che si ottiene ponendo $t = 0$) non soddisfa nessuna delle equazioni di r. Dunque possiamo procedere a trovare la distanza tra le rette. Devo trovare un punto Q su r in maniera tale che il vettore $\overrightarrow{PQ}$ sia ortogonale alle rette, così avremo che $d(r, s) = \overline{PQ}$. Il generico punto di r si ottiene mettendo r in forma paramentrica. Si ha $r : \begin{cases} x = h \\ y = -3h - 3 \\ z = 2h + 9 \end{cases}$, quindi $\overrightarrow{PQ} = (h, -5h - 3, 2h + 10)$. Allora $\overrightarrow{PQ}$ è ortogonale alle rette se $(h, -5h-3, 2h+10) \cdot (-1, 3, -2) = -20h - 29 = 0$, quindi per $h = -\frac{29}{20}$ e $\overrightarrow{PQ} = (\frac{-29}{20}, \frac{17}{4}, \frac{71}{10})$. Quindi $d(r, s) = \overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{29}{20}\right)^2 + \left(\frac{17}{4}\right)^2 + \left(\frac{71}{10}\right)^2}$.

   b) Il piano cercato si può facilmente scrivere in forma parametrica, in quanto abbiamo un punto di passaggio (possiamo scegliere P o Q) e due vettori direzionali (indipendenti!): il vettore $\overrightarrow{PQ} = 3(-1, 1, 0)$ (quindi possiamo prendere $(-1, 1, 0)$) e il vettore normale di π, cioè $(2, -1, 4)$.

2. Le uniche matrici ad essere ortogonalmente diagonalizzabili sono le matrici simmetriche, quindi, in questo caso, le matrici A e B. In realtà la matrice A è già diagonale, quindi non c'è nulla da fare. Quindi dobbiamo diagonalizzare solo la matrice B. $\det(B - \lambda I_3) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$, quindi abbiamo $\lambda = -1$ con molteplicità 2 e $\lambda = 2$ con molteplicità 1. Da $\lambda = -1$ si ottiene il sistema $(B + I_3)\underline{x} = \underline{0}$, cioè $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Una base per l'autospazio è allora $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$. Per ottenere una base ortonormale dell'autospazio, dobbiamo applicare Gram-Schmidt. Si ottiene $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, per ottenere v_2, si fa prima $(0, 1, -1) - ((0, 1, -1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0))(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (0, 1, -1) - (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Poi si normalizza quest'ultimo vettore e si ottiene $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$. Dunque una base ortonormale per l'autospazio associato a -1 è $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})\}$. Da $\lambda = 2$ otteniamo il sistema $(B - 2I_3)\underline{x} = \underline{0}$, cioè $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. Il sistema ha

∞^1 soluzioni ed una soluzione non nulla è $(1,1,1)$, che normalizzato diventa $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
Dunque si ha $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

3. Si osserva che il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è 3, quindi $\dim V = 3$. Visto che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, esso è definito da $4-3=1$ equazioni. Per trovare l'equazione che definisce V bisogna imporre $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0$. Si ottiene $-x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$. Per trovare una base per $W \cap V$, bisogna risolvere il sistema formato dalle equazioni che definiscono gli spazi, dunque $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. L'insieme delle soluzioni è $\{(-4x_4 - 2x_3, -2x_4, x_3, x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$, quindi sono ∞^2 e $\dim V \cap W = 2$. Una base è $\{(-2,0,1,0), (-4,-2,0,1)\}$. Per completare tale insieme ad una base di $\mathbb{R}^4$, dobbiamo aggiungere altri 2 vettori in maniera tale che l'insieme così ottenuto risulti linearmente indipendente. Nella matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il minore $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, e la sottomatrice occupa la terza e quarta colonna, quindi per ottenere un insieme indipendente basta aggiungere i due vettori della base canonica che hanno 1 nella prima e seconda colonna. Quindi una possibile base di $\mathbb{R}^4$ che contiene la base di $V \cap W$ è $\{(-2,0,1,0), (-4,-2,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$.

4. La matrice associata ad f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha rango 2, quindi la dimensione dell'immagine è 2, quella del nucleo è 3-2=1. Una base dell'immagine è ottenuta da 2 colonne indipendenti della matrice rappresentativa, ad esempio $\{(1,-1,0), (1,0,-1)\}$, quindi si ottiene $B_{Imf} = \{v_1 - v_2, v_1 - v_3\}$. Per trovare una base del nucleo, è necessario risolvere il sistema lineare omogeneo associato, quindi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Dato che il rango della matrice è 2, le equazioni essenziali sono 2, quindi basta risolvere:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\{(-x_2, x_2, -x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$. Una base per le soluzioni è $\{(-1,1,-1)\}$, quindi una base per il nucleo è $B_{Kerf} = \{-v_1 + v_2 - v_3\}$.