

Esempio di Prova di Esame 1

Domande:

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n , dire quando $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette soluzioni non nulle.
2. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare diagonalizzabile con autovalori 0 con molteplicità 2, -1 con molteplicità 1 e 3 con molteplicità 1. Qual è la dimensione del nucleo e dell'immagine di f ?
3. Sia $M_{23}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×3 . Sia U il sottospazio di $M_{23}(\mathbb{R})$ definito da $a_{11} + a_{21} = 0 = a_{12} + a_{22}$. Dire qual è la dimensione di U .
4. Sia A una matrice quadrata di ordine n antisimmetrica, cioè $A = -A^T$. Cosa posso dire del determinante di A ? Giustificare la risposta.
5. Sia w il prodotto vettoriale dei vettori u e v dello spazio cartesiano. Dire quali sono la direzione e il modulo di w .

Esercizi:

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. a) Determinare il piano contenente la retta $r: \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ 5y - z = 0 \end{cases}$ e ortogonale al piano $\pi: -x + 2y - z + 1 = 0$.
b) Determinare l'angolo fra il piano $\pi_1: x + 3z = 0$ e $\pi_2: 2x + y - z = 0$.
c) Calcolare la distanza fra la retta $r: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = -t + 5 \end{cases}$ e la retta $s: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.
2. a) Trovare la dimensione e una base dell'intersezione fra i sottospazi $U = \langle (1, 0, 7, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0) \rangle$ e $V = \langle (0, 0, 1, 1), (-1, -1, 2, 0) \rangle$ di \mathbb{R}^4 .
b) Trovare le componenti dei vettori $(0, 0, 0)$ e $(-1, 2, 1)$ rispetto alla base ordinata $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)\}$.
3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $\text{Ker}f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e tale che $f(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$. Trovare $f(0, 0, 0)$, $f(1, 0, 1)$, $f(-1, 1, 2)$.

Soluzioni

Risposte alle domande:

1. Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non nulle solo se è indeterminato. In questo caso, allora, si deve avere $\det A = 0$.
2. Se si sceglie come base per il dominio e per il codominio la medesima base costituita da autovettori, allora la matrice che rappresenta f sarà una matrice diagonale D , sulla cui diagonale principale ci saranno gli autovalori di f ripetuti con la loro molteplicità. Poiché sulla diagonale di D ci sono solo due elementi non nulli, $\rho(D) = 2$. Dunque $\dim \text{Im} f = 2$ e per il Teorema: $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f$, si ha che pure $\text{Ker} f$ ha dimensione 2.
3. Le matrici di U sono del tipo: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{11} & -a_{12} & a_{23} \end{pmatrix}$ con $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ liberi di variare in \mathbb{R} . Essendo i parametri liberi 4, $\dim U = 4$.
4. $\det A = \det(-A^T) = (-1)^n \det A^T = (-1)^n \det A$. Per n pari, si ha la condizione banale $\det A = \det A$, per n dispari $\det A = -\det A$, dunque $\det A = 0$.
5. Se u e v non sono paralleli, allora w è un vettore non nullo ortogonale ad entrambi il cui modulo è $|u||v| \sin \theta$, dove θ è l'angolo convesso compreso tra u e v .

Svoglimento esercizi:

1. **a)** Si considera il fascio di piani contenente $r : \lambda(x + y + z - 6) + \mu(5y - z) = \lambda x + (\lambda + 5\mu)y + (\lambda - \mu)z = 0$. All'interno di tale fascio, bisogna trovare il piano ortogonale a π . Due piani sono ortogonali se e solo se i loro vettori normali sono ortogonali. Dunque devo avere $(\lambda, \lambda + 5\mu, \lambda - \mu) \cdot (-1, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 2\lambda + 10\mu - \lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$. Quindi il piano cercato è $x + y + z - 6 = 0$.
- b)** L'angolo è $\arccos \frac{(1,0,3) \cdot (2,1,-1)}{\|(1,0,3)\| \|(2,1,-1)\|} = \arccos \frac{-1}{2\sqrt{15}}$.
- c)** Bisogna verificare la posizione reciproca delle rette. Il vettore direzionale di r è $(1, -2, -1)$, quello di s $(1, 1, 0)$, dunque le due rette non sono parallele. La loro intersezione è l'insieme vuoto, quindi non sono incidenti. Dunque r e s sono sghembe. Allora per trovare la distanza fra esse, basta trovare il piano π per s parallelo a r e poi calcolare la distanza di un punto qualsiasi di r da π . La retta s si può scrivere: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, dunque il fascio di piani per s è $\lambda(x - y) + \mu z = 0$. Il piano del fascio parallelo a r è quello per cui $(\lambda, -\lambda, \mu) \cdot (1, -2, -1) = 0$, dunque $3\lambda = \mu$. Quindi $\pi : x - y + z = 0$. Su r possiamo prendere il punto $P = (1, 3, 5)$ e applicare la formula distanza punto-piano: $d(P, \pi) = \frac{|1 - 3 + 5|}{\sqrt{1 + 1 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{11}}$.

2. **a)** Si osserva che il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è 3, quindi $\dim U = 3$. Visto che U è un sottospazio di \mathbb{R}^4 , esso è definito da $4 - 3 = 1$ equazione. Si poteva notare immediatamente che i vettori della base di U hanno tutti l'ultima componente uguale a 0, quindi l'equazione che definisce U è $x_4 = 0$. Altrimenti si procede come sempre, e per trovare l'equazione di U bisogna imporre $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0$. Sviluppando

rispetto all'ultima colonna, si ottiene $-6x_4 = 0$, quindi $x_4 = 0$. Per trovare una base per $U \cap V$, bisogna vedere quali combinazioni lineari della base di V sono in U . Quindi per quali h_1, h_2 $h_1(0, 0, 1, 1) + h_2(-1, -1, 2, 0)$ è soluzione dell'equazione $x_4 = 0$. Si ha $h_1(0, 0, 1, 1) + h_2(-1, -1, 2, 0) = (-h_2, -h_2, h_1 + 2h_2, h_1)$ che dunque ha $x_4 = 0$ per $h_1 = 0$. Quindi $U \cap V = \{h(-1, -1, 2, 0), h \in \mathbb{R}\}$, la dimensione dunque è 1 ed una base è $\{(-1, -1, 2, 0)\}$.

b) Le componenti di $(0, 0, 0)$ rispetto a qualsiasi base sono sempre $(0, 0, 0)$ poichè una base è un insieme indipendente. Si osserva che la base data è ortonormale, dunque le componenti di $(-1, 2, 1)$ si trovano facendo il prodotto scalare. Quindi $h_1 = (-1, 2, 1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$, $h_2 = (-1, 2, 1) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$, $h_3 = (-1, 2, 1) \cdot (0, 1, 0) = 2$.

3. $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ per ogni funzione lineare. Si nota che $(1, 0, 1) \in \text{Ker } f$, quindi $f(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Per conoscere $f(-1, 1, 2)$, bisogna conoscere il valore di f su una base. Sappiamo che $\text{Ker } f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, quindi $\dim \text{Ker } f = 2$ e possiamo trovare in esso due vettori indipendenti, ad esempio $(1, 0, 1)$ e $(1, -1, 0)$. Dunque sappiamo che $f(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$, $f(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$, $f(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$ e $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ è una base di \mathbb{R}^3 . Si può dunque scrivere $(-1, 1, 2)$ come combinazione lineare di tali vettori, quindi $(-1, 1, 2) = -2(1, 0, 0) + 2(1, 0, 1) - (1, -1, 0)$ e $f(-1, 1, 2) = -2f(1, 0, 0) + 2f(1, 0, 1) - f(1, -1, 0) = -2(0, 1, 1) = (0, -2, -2)$.