Esempio di Prova di Esame 1

Domande:

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n, dire quando $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ ammette soluzioni non nulle.
2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare diagonalizzabile con autovalori 0 con molteplicità 2, -1 con molteplicità 1 e 3 con molteplicita 1. Qual è la dimensione del nucleo e dell'immagine di f?
3. Sia A una matrice quadrata di ordine n antisimmetrica, cioè $A = -A^T$. Cosa posso dire del determinante di A? Giustificare la risposta.

Esercizi:

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. **a)** Determinare il piano contenente la retta $r : \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ 5y - z = 0 \end{cases}$ e ortogonale al piano $\pi : -x + 2y - z + 1 = 0$.

   b) Calcolare la distanza fra la retta $r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = -t + 5 \end{cases}$ e la retta $s : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.

2. **a)** Trovare la dimensione e una base dell'intersezione fra i sottospazi $U = \langle(1, 0, 7, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\rangle$ e $V = \langle(0, 0, 1, 1), (-1, -1, 2, 0)\rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

   b) Trovare le componenti dei vettori $(0, 0, 0)$ e $(-1, 2, 1)$ rispetto alla base ordinata $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)\}$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $Kerf = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e tale che $f(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$. Trovare $f(0, 0, 0), f(1, 0, 1), f(-1, 1, 2)$.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. La matrice A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, trovare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice P tale che $D = P^{-1}AP$.

Soluzioni
Risposte alle domande:

1. Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non nulle solo se è indeterminato. In questo caso, allora, si deve avere $\det A = 0$.

2. Se si sceglie come base per il dominio e per il codominio la medesima base costituita da autovettori, allora la matrice che rappresenta f sarà una matrice diagonale D, sulla cui diagonale principale ci sarrano gli autovalori di f ripetuti con la loro molteplicità. Poichè sulla diagonale di D ci sono solo due elementi non nulli, $\rho(D) = 2$. Dunque $\dim Imf = 2$ e per il Teorema: $\dim \mathbb{R}^4 = \dim Imf + \dim Kerf$, si ha che pure $Kerf$ ha dimensione 2.

3. $\det A = \det(-A^T) = (-1)^n \det A^T = (-1)^n \det A$. Per n pari, si ha la condizione banale $\det A = \det A$, per n dispari $\det A = -\det A$, dunque $\det A = 0$.

Svoglimento esercizi:

1. **a)** Si considera il fascio di piani contente $r : \lambda(x + y + z - 6) + \mu(5y - z) = \lambda x + (\lambda + 5\mu)y + (\lambda - \mu z) = 0$. All'interno di tale fascio, bisogna trovare il piano ortogonale a π. Due piani sono ortogonali se e solo se i loro vettori normali sono ortogonali. Dunque devo avere $(\lambda, \lambda + 5\mu, \lambda - \mu) \cdot (-1, 2 - 1) = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 2\lambda + 10\mu - \lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$. Quindi il piano cercato è $x + y + z - 6 = 0$.

   b) Bisogna verificare la posizione reciproca delle rette. Il vettore direzionale di r è $(1, -2, -1)$, quello di s $(1, 1, 0)$, dunque le due rette non sono parallele. La loro intersezione è l'insieme vuoto, quindi non sono incidenti. Dunque r e s sono sghembe. Allora per trovare la distanza fra esse, basta trovare il piano π per s parallelo a r e poi calcolare la distanza di un punto qualsiasi di r da π. La retta s si può scrivere: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, dunque il fascio di piani per s è $\lambda(x - y) + \mu z = 0$. Il piano del fascio parallelo a r è quello per cui $(\lambda, -\lambda, \mu) \cdot (1, -2, -1) = 0$, dunque $3\lambda = \mu$. Quindi $\pi : x - y + z = 0$. Su r possiamo prendere il punto $P = (1, 3, 5)$ e applicare la formula distanza punto–piano: $d(P, \pi) = \frac{|1-3+15|}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{13}{\sqrt{11}}$.

2. **a)** Si osserva che il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è 3, quindi $\dim U = 3$. Visto che U è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, esso è definito da $4 - 3 = 1$ equazione. Si poteva notare immediatemene che i vettori della base di U hanno tutti l'ultima componente uguale a 0, quindi l'equazione che definisce U è $x_4 = 0$. Altrimenti si procede come sempre, e per trovare l'equazione di U bisogna imporre $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0$. Sviluppando rispetto all'ultima colonna, si ottiene $-6x_4 = 0$, quindi $x_4 = 0$. Per trovare una base per $U \cap V$, bisogna vedere quali combinazioni lineari della base di V sono in U. Quindi per quali h_1, h_2 $h_1(0, 0, 1, 1) + h_2(-1, -1, 2, 0)$ è soluzione dell'equazione $x_4 = 0$. Si ha $h_1(0, 0, 1, 1) + h_2(-1, -1, 2, 0) = (-h_2, -h_2, h_1 + 2h_2, h_1)$ che dunque ha $x_4 = 0$ per $h_1 = 0$. Quindi $U \cap V = \{h(-1, -1, 2, 0), h \in \mathbb{R}\}$, la dimensione dunque è 1 ed una base è $\{(-1, -1, 2, 0)\}$.

b) Le componenti di $(0,0,0)$ rispetto a qualsiasi base sono sempre $(0,0,0)$ poichè una base è un insieme indipendente. Si osserva che la base data è ortonormale, dunque le componenti di $(-1,2,1)$ si trovano facendo il prodotto scalare. Quindi $h_1 = (-1,2,1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$, $h_2 = (-1,2,1) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$, $h_3 = (-1,2,1) \cdot (0,1,0) = 2$.

3. $f(0,0,0) = (0,0,0)$ per ogni funzione lineare. Si nota che $(1,0,1) \in Kerf$, quindi $f(1,0,1) = (0,0,0)$. Per conoscere $f(-1,1,2)$, bisogna conoscere il valore di f su una base. Sappiamo che $Kerf = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, quindi $\dim Kerf = 2$ e possiamo trovare in esso due vettori indipendenti, ad esempio $(1,0,1)$ e $(1,-1,0)$. Dunque sappiamo che $f(1,0,0) = (0,1,1)$, $f(1,0,1) = (0,0,0)$, $f(1,-1,0) = (0,0,0)$ e $\{(1,0,0),(1,0,1),(1,-1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Si può dunque scrivere $(-1,1,2)$ come combinazione lineare di tali vettori, quindi $(-1,1,2) = -2(1,0,0) + 2(1,0,1) - (1,-1,0)$ e $f(-1,1,2) = -2f(1,0,0) + 2f(1,0,1) - f(1,-1,0) = -2(0,1,1) = (0,-2,-2)$.

4. Per prima cosa, si devono trovare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche, dunque bisogna risolvere l'equazione $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(\lambda+3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, -3$$

con $\mu_a(0) = 2, \mu_a(-3) = 1$. Si ha immediatamente che $\mu_g(-3) = 1$, occorre trovare $\mu_g(0)$, dunque la dimensione dello spazio delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases} .$$

Quindi $V_0 = \{(2x_3, x_2, x_3), x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ e $\mu_g(0) = 2$. Poiché $\mu_g(0) + \mu_g(-3) = 3$, A è diagonalizzabile. Una base per V_0 è $\{(0,1,0),(2,0,1)\}$. Per trovare una base per V_{-3}, occorre risolvere $(A + 3I_3)\underline{x} = \underline{0}$:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 = 02x_1 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

Si ottiene $V_{-3} = \{(x_1, 0, 2x_1), x_1 \in \mathbb{R}\}$ e quindi una base è $\{(1,0,2)\}$.

Una matrice D è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.