Sistema omogeneo associato ad un sistema lineare

Nel seguito, se non diversamente specificato, si avrà $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Proposizione1 Se un sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione non banale (vale a dire $\neq \underline{0}$), allora ne ha infinite.

Dim. Sia $c \neq \underline{0}$ soluzione del sistema $Ax = \underline{0}$. Allora notiamo che $\forall h \in \mathbb{R}$, $A(hc) = h(Ac) = h\underline{0} = \underline{0}$, dunque hc è soluzione del sistema $\forall h \in \mathbb{R}$. Siano h_1 e $h_2 \in \mathbb{R}$ e supponiamo che $h_1 c = h_2 c$. Si ha $h_1 c = h_2 c \Rightarrow (h_1 - h_2)c = \underline{0}$ e, da [1,Proposizione 2.1.4], sappiamo che ciò è possibile se $(h_1 - h_2) = 0$ oppure $c = \underline{0}$. Poichè abbiamo preso $c \neq \underline{0}$, abbiamo che $h_1 c = h_2 c \Rightarrow h_1 - h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2$. Dunque se $h_1 \neq h_2$, allora $h_1 c \neq h_2 c$. Ne segue che: $\{hc, h \in \mathbb{R}\}$ è un insieme infinito di soluzioni per $Ax = \underline{0}$.

Definizione. Il *sistema lineare omogeneo associato a* $Ax = b$ è il sistema: $Ax = \underline{0}$.

Esempio. Dato il sistema: $\begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$, il sistema omogeneo associato ad esso è: $\begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Teorema2 Sia $Ax = b$ un sistema risolubile e sia c_1 una sua soluzione. Se c_0 è soluzione del sistema omogeneo associato, allora $c_0 + c_1$ è soluzione del sistema dato. Inoltre, *ogni* soluzione di tale sistema si può scrivere come $c_0 + c_1$, dove c_0 è una soluzione del sistema omogeneo associato.

Dim. Se c_1 è soluzione di $Ax = b$, allora $Ac_1 = b$; se c_0 è soluzione di $Ax = \underline{0}$ allora $Ac = \underline{0}$. Allora $A(c_0 + c_1) = Ac_0 + Ac_1 = \underline{0} + b = b$, dunque $c_0 + c_1$ è soluzione del sistema dato.

Sia ora c_2 una qualsiasi soluzione del sistema dato. Si ha che $A(c_2 - c_1) = Ac_2 - Ac_1 = b - b = \underline{0} \Rightarrow c_2 - c_1$ è soluzione del sistema omogeneo associato, chiamola allora c_0. Dunque $c_2 - c_1 = c_0 \Rightarrow c_2 = c_0 + c_1$.

Dunque, se $Ax = b$ è risolubile, l'insieme delle sue soluzioni è: $\{c_0 + c_1 | Ac_0 = \underline{0}\}$ e c_1 si dice soluzione particolare.

Corollario3

Se un sistema ammette più di una soluzione, allora ne ammette infinite.

Dim. Supponiamo che il sistema $Ax = b$ abbia due soluzioni distinte, diciamo c_1 e c_2, allora sappiamo dal Teorema2 che $c_2 = c_1 + c_0$ con c_0 soluzione di $Ax = \underline{0}$. Poichè $c_2 \neq c_1$, abbiamo che $c_0 \neq \underline{0}$, dunque il sistema omogeneo associato ha almeno una soluzione non banale. Per la Proposizione1 il sistema omogeneo associato ha infinite soluzione e dal Teorema2 discende che anche $Ax = b$ ne ha infinite.

Definizione Un sistema lineare può essere:

- *non risolubile* o incompatibile, cioè non avere alcuna soluzione (ricordiamo che questo è possibile solo se il sistema non è omogeneo!)
- *risolubile* o compatibile, cioè ha almeno una soluzione e dunque abbiamo due sottocasi:
  - *determinato* se ammette un'unica soluzione
  - *indeterminato* se ammette infinite soluzioni.

Bibliografia

[1] S.Capparelli e A.Del Fra, Geometria, Società Editrice Esculapio.