Insiemi indipendenti e indipendenti, Insiemi di generatori

Proposizione1 Sia S un insieme costituito da un solo vettore, allora S è dipendente se e solo se $S = \{\underline{0}\}$.

Dim. Sia $S = \{v\}$. Allora S è dipendente se $\exists\ h \in \mathbb{R}, h \neq 0$, tale che $hv = \underline{0}$. Ma se $hv = \underline{0}$ e $h \neq 0$, si deve avere che $v = \underline{0}$.

Proposizione2 Sia S un insieme dipendente, allora ogni S' contentente S è dipendente.

Dim.

Sia $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un insieme dipendente, quindi $\exists\ h_1, h_2, \ldots, h_r$ non tutti nulli tali che $h_1v_1 + h_2v_2 + \ldots + \ldots h_rv_r = \underline{0}$. Sia $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_t\}$ un insieme che contenga S. Allora $h_1v_1 + h_2v_2 + \ldots + \ldots h_rv_r$ è una combinazione lineare di elementi di S' (in cui abbiamo posto $h_i = 0 \forall i = r+1, \ldots, t$) che ci dà $\underline{0}$ e cui coefficienti non sono tutti nulli.

Esempio. Se S contiene il vettore nullo, dalla Proposizione 1 e dalla Proposizione 2 si ha che S è dipendente.

Esempio. Sia $S = \{v, hv, v_2, \ldots, v_t\}$ con $h \in \mathbb{R}$, allora S è dipendente, in quanto contiene l'insieme $\{v, hv\}$ che è dipendente.

Se $S' \subset S$ e S è dipendente, non possiamo dire nulla su S'. Ad esempio, se $S = \{v, 2v, 3v\}$ e $v \neq \underline{0}$, allora S è dipendente, il sottinsieme $S' = \{v, 2v\}$ è dipendente, ma il sottinsieme $S'' = \{v\}$ è indipendente.

Viceversa, se ho S insieme indipendente e S' insieme che contiene S, non posso dire a priori se S' è indipendente oppure no: in alcuni casi lo è, in altri no, ad esempio se $S' = S \cup \{\underline{0}\}$, allora S' è dipendente. Si ha per gli insiemi indipendenti un risultato speculare alla Proposizione 2:

Proposizione3 Sia S un insieme indipendente e S' un insieme contenuto in S, allora S' è indipendente.

Dim. Supponiamo per assurdo che S' sia dipendente, allora dalla Proposizione 2, anche S lo sarebbe, contraddicendo l'ipotesi.

Supponiamo di avere $V = \{v\}$ e di voler definire due operazioni $+$ e $\cdot$ su di esso in modo tale che risulti essere uno spazio vettoriale. Dagli assiomi che definiscono uno spazio vettoriale, sappiamo che V deve contenere l'elemento neutro rispetto a $+$, dunque dobbiamo porre $v = \underline{0}$. Si verifica facilmente che $V = \{\underline{0}\}$ verifica tutti gli 8 assiomi che definiscono uno spazio vettoriale.

Definizione Lo spazio vettoriale $V = \{\underline{0}\}$ si dice *spazio vettoriale banale.*

Proposizione4 Uno spazio vettoriale non banale ha infiniti vettori.

Dim. Se V è uno spazio vettoriale non banale, allora $\exists\, v \in V$ tale che $v \neq \underline{0}$. Siano $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, allora $h_1 v = h_2 v \Rightarrow h_1 v - h_2 v = \underline{0} \Rightarrow (h_1 - h_2)v = \underline{0}$. Poichè $v \neq \underline{0}$, si deve avere $h_1 - h_2 = 0$ e cioè $h_1 = h_2$. Dunque se $h_1 \neq h_2$, allora $h_1 v \neq h_2 v$. L'insieme $\{hv, h \in \mathbb{R}\}$ è contenuto in V ed è costituito da infiniti elementi, poichè sono infiniti i numeri reali.

Nonstante gli spazi vettoriali (non banali) siano costituiti da infiniti vettori, talvolta è possibile "ottenerli" come combinazione lineare di un numero finito di essi, vediamo come.

Definizione. Un insieme $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\} \subset V$ si dice un *insieme di generatori* per V se ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di essi.

Esempio.

In $\mathbb{R}^n$, sia e_i il vettore che ha 1 nella i-esima componente e 0 altrove, allora $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ è un insieme di generatori, in quanto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$.

Esempio.

In $M_{m,n}(\mathbb{R})$, sia E_{ij} la matrice $m \times n$ che ha 1 nella componente nella i-esima riga e j-esima colonna e 0 altrove, allora $\{E_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ è un insieme di generatori, in quanto ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si può scrivere come $A = \displaystyle\sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} a_{ij} E_{ij}$.

Esempio.

In $\mathbb{R}^4$, consideriamo l'insieme $S = \{(1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,-1,0,,1), (2,0,0,1)\}$. Esso risulta essere un insieme di generatori; vediamo perchè. Vogliamo scrivere (x_1, x_2, x_3, x_4) come combinazione lineare di elementi di S, quindi: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = h_1(1,0,0,0) + h_2(0,2,1,0) + h_3(0,-1,0,1) + h_4(2,0,0,1) = (h_1 + 2h_4, 2h_2 - h_3, h_2, h_3 + h_4) \Rightarrow \begin{cases} h_1 + 2h_4 = x_1 \\ 2h_2 - h_3 = x_2 \\ h_2 = x_3 \\ h_3 + h_4 = x_4 \end{cases}$. Se tale sistema (il cui vettore delle incognite è (h_1, h_2, h_3, h_4)) ha soluzioni $\forall\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, allora S è unsieme di generatori. La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Procediamo con la riduzione a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 - 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$. Osserviamo che abbiamo un pivot per ogni incognita,

quindi il sistema è risolubile $\forall\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Esempio. L'insieme $S = \{(1,2,3), (-1,1,0), (1,1,2)\}$ non è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^3$, viediamo perchè. Proviamo a scrivere un generico vettore di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare di elementi di S, dunque: $(x_1, x_2 x_3) = h_1(1,2,3) + h_2(-1,1,0) + h_3(1,1,2) = (h_1 - h_2 + h_3, 2h_1 + h_2 + h_3, 3h_1 + 2h_3)$. Dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} h_1 - h_2 + h_3 = x_1 \\ 2h_1 + h_2 + h_3 = x_2 \\ 3h_1 + 2h_3 = x_3 \end{cases}$. La matrice completa associata al sistema è: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 0 & 2 & x_3 \end{pmatrix}$. Procediamo con la riduzione a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 0 & 2 & x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_3 - 3x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_3 - 3x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$. Dunque se $x_3 - x_1 - x_2 \neq 0$ il sistema è incompatibile ed

il vettore (x_1, x_2, x_3) non si può scrivere come combinazione lineare di elementi di S.