Lemma di Steinitz

In uno spazio vettoriale V di dimensione n, un insieme indipendente ha al più n vettori.

Dim. Sia $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ un insieme di m vettori di V con $m > n$ e sia $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base per V.

Sia $h_1u_1 + h_2u_2 + \ldots + h_mu_m = \underline{0}$. Poichè B è una base per V, possiamo scrivere ogni vettore di S come combinazione lineare di elementi di B in unico modo.

Si ha allora:

$$\begin{cases} u_1 = k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + \ldots + k_{1n}v_n \\ u_2 = k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + \ldots + k_{2n}v_n \\ \ldots \\ u_i = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \ldots + k_{in}v_n \\ \ldots \\ u_m = k_{m1}v_1 + k_{m2}v_2 + \ldots + k_{mn}v_n \end{cases}$$

e sostituendo tali espressioni, si ha: $h_1u_1 + h_2u_2 + \ldots + h_mu_m = h_1(k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + \ldots + k_{1n}v_n) + h_2(k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + \ldots + k_{2n}v_n) + \ldots + h_m(k_{m1}v_1 + k_{m2}v_2 + \ldots + k_{mn}v_n) = \underline{0}$. Mettendo in evidenza i vettori di B, si ottiene: $(h_1k_{11} + h_2k_{21} + \ldots + h_mk_{m1})v_1 + (h_1k_{12} + h_2k_{22} + \ldots + h_mk_{m2})v_2 + \ldots + (h_1k_{1n} + h_2k_{2n} + \ldots + h_mk_{mn})v_n = \underline{0}$. Poichè B è un insieme indipendente, l'unica combinazione lineare di elementi di B uguale a $\underline{0}$ è quella banale, quindi:

$$\begin{cases} h_1k_{11} + h_2k_{21} + \ldots + h_mk_{m1} = 0 \\ h_1k_{12} + h_2k_{22} + \ldots + h_mk_{m2} = 0 \\ \ldots \\ h_1k_{1i} + h_2k_{2i} + \ldots + h_mk_{mi} \\ \ldots \\ h_1k_{1n} + h_2k_{2n} + \ldots + h_mk_{mn} = 0 \end{cases}.$$

In tale sistema, le incognite sono $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, quindi abbiamo m incognite ed n equazioni, con $m > n$, dunque il sistema è indeterminato. Esiste allora $(h_1, h_2, \ldots, h_m) \neq \underline{0}$ soluzione del sistema e dunque una combinazione lineare non banale di elementi di S uguale a $\underline{0}$. Dunque un insieme indipendente di V ha al più n vettori.