SISTEMI LINEARI

Sia $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e si scrivano x e b come vettori colonna.

Il sistema $Ax = b$ è un sistema lineare in m equazioni e n incognite. La matrice $A' = (A \quad b) \in \mathbb{R}_{m,n+1}$ si dice matrice completa associata al sistema. Con S' denotiamo una matrice equivalente ad A' (vale a dire ottenuta mediante operazioni elementari sulle righe di A); si nota che $S' = (S \quad b_1)$, con b_1 vettore colonna di lunghezza m e S matrice a scalini equivalente ad A. Sia M una matrice, con $\det(M)$ si denota il determinante di M e con $\rho(M)$ si denota il rango di M. Si ricordano i seguenti fatti:

Teorema *Se il sistema è indeterminato, il mumero delle variabili libere è uguale ad n meno il numero di righe non nulle di S.*

Teorema

$\rho(M)$ è uguale al numero di righe non nulle di una matrice a scalini ottenuta da M mediante operazioni elementari. Dunque se il sistema è indeterminato, il mumero delle variabili libere è $n - \rho(A)$.

Osservazione

$\rho(A') \geq \rho(A)$.

	Gauss	**Rouchè-Capelli**	**Cramer**
$m > n$	*Teorema*: *In una matrice a scalini $m \times n$, il numero delle righe non nulle è al più n.* Dunque attraverso operazioni elementari si può sempre ottenere un sistema equivalente a quello dato con m' equazioni con $m' \leq n$ (vedi allora casi successivi).	$\rho(A) \leq n; \rho(A') \leq n+1$. Il sistema è: determinato $\Leftrightarrow \rho(A') = \rho(A) = n$ indeterminato $\Leftrightarrow \rho(A') = \rho(A) < n$ incompatibile $\Leftrightarrow \rho(A') > \rho(A)$.	Non si puo usare.
$m = n$	Il sistema è: determinato $\Leftrightarrow S$ non ha righe nulle indeterminato $\Leftrightarrow S$ ha delle righe nulle ed esse fanno parte di righe nulle di S' incompatibile $\Leftrightarrow S$ ha almeno una riga nulla che fa parte di una riga non nulla di S'.	$\rho(A) \leq n; \rho(A') \leq n$. Il sistema è determinato $\Leftrightarrow \rho(A) = n$ indeterminato $\Leftrightarrow \rho(A') = \rho(A) < n$ incompatibile $\Leftrightarrow \rho(A) < \rho(A')$.	Il sistema è: determinato $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ indeterminato o incompatibile $\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < n$ ma non ci permette di distinguere i due casi.
$m < n$	Il sistema è: indeterminato $\Leftrightarrow S$ non ha righe nulle che fanno parte di righe non nulle di S' incompatibile $\Leftrightarrow S$ ha almeno una riga nulla che fa parte di una riga non nulla di S'.	$\rho(A')$ e $\rho(A) \leq m < n$. Il sistema è: indeterminato $\Leftrightarrow \rho(A') = \rho(A)$ incompatibile $\Leftrightarrow \rho(A) < \rho(A')$.	Si potrebbe applicare se considerassimo come matrice completa associata al sistema la matrice A'_1 tale che le prime m righe sono quelle di A' e le ultime $n-m$ sono nulle, ottenendo così una matrice dei coefficienti A_1 quadrata con $n-m$ righe nulle $\Rightarrow \det(A_1) = 0$ e dunque il sistema non è determinato.