Insiemi di generatori, insiemi indipendenti e dipendenti, basi

Esercizio1:
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, il polinomio $1 + x - x^2$ è combinazione lineare di $\{1 + x, 1 - 2x + x^2, x - x^2\}$?

Esercizio2:
Nello spazio vettoriale delle matrici quadrate $\mathbb{R}_{2,2}$, scrivere $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio3:
Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2 \in V$. Dimostrare che $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1 + v_2, v_2 \rangle$.

Esercizio4:
Stabilire se i vettori $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, 1, 3)$ generano $\mathbb{R}^3$.

Esercizio5:
Dati i vettori $v_1 = (2, -1, 0, 3), v_2 = (1, 2, 5, -1), v_3 = (7, -1, 5, 8)$ di $\mathbb{R}^4$, scrivere ognuno di essi come combinazione lineare dei rimanenti. L'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è indipendente?

Esercizio6:
Verificare che i vettori $v_1 = (3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), v_2 = (7, 1 + 2\sqrt{2})$ sono linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio7:
Dimostrare che $\{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ è una base per $\mathbb{R}_{2,2}$.

Esercizio8:
Sia $P_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] |\deg(p(x)) \leq 2\} \cup \{0\}$. Dimostrare che $\{1+x, 1-x^2, 1+x-x^2, 1+x-2x^2\}$ è un insieme di generatori per P_2 e estrarne una base.

Esercizio9:
Determinare una base del sottospazio $\langle (1, 2, -1, 2), (5, 3, 1, 2), (-13, -5, -5, -2) \rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio10:
Determinare una base del sottospazio $\langle (2, 3, -2, 5, 1), (3, -1, 2, 0, 4), (4, -5, 6, -5, 7) \rangle$ di $\mathbb{R}^5$.

Esercizio11:

Dati i vettori $(1,2,3,1),(1,2,-3,1)$ di $\mathbb{R}^4$, verificare che sono indipendenti e completarli ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio12:

Determinare la dimensione e una base del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ costituito dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4-x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-7x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$$

Esercizio13:

Determinare la dimensione e una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 3x_2+x_3+x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+3x_3+x_4=0 \\ -4x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

Esercizio14:

In $\mathbb{R}^3$ determinare le componenti del vettore $(1,-3,5)$ rispetto alla base $\{(0,1,0),(1,1,1),(3,2,1)\}$.

Soluzioni:

1) Sì.

2) L'unica combinazione lineare possibile è $D=3A-2B-C$.

4) No.

12) La dimensione è 3.

13) La dimensione è 1.

14) Il vettore delle componenti è $(-6,7,-2)$.