

1) 2) Scrivo entrambe le rette in forma parametrica:

$$v_2 = (1, -1, 2) \wedge (2, 2, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (-1-4, -(1-4), 2+2)$$

$$= (-5, 3, 4)$$

punto di passaggio:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 2y + 2 + 2y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ 4y = -3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = \frac{1}{4} - 5k \\ y = -\frac{3}{4} + 3k \\ z = 4k \end{cases}$$

$$P \in \Delta, \quad Q \in \Delta \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{4} - 5k - \frac{1}{4} + 2h, -\frac{3}{4} + 3k - \frac{1}{4}, 4k - 3h \right) =$$

$$\left(-5k+2h-\frac{3}{4}, 3k-h-\frac{3}{4}, 4k-3h\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(-5k+2h-\frac{3}{4}, 3k-h-\frac{3}{4}, 4k-3h\right) \cdot (-2, 1, 3) = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V_3} = 0 \Leftrightarrow \left(-5k+2h-\frac{3}{4}, 3k-h-\frac{3}{4}, 4k-3h\right) \cdot (-5, 3, 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{10k} - \underline{4h} + \underline{\frac{3}{2}} + \underline{3k} - \underline{h} - \underline{\frac{3}{4}} + \underline{12k} - \underline{9h} = 0 \\ \underline{25k} - \underline{10h} + \underline{\frac{15}{4}} + \underline{9k} - \underline{3h} - \underline{\frac{9}{4}} + \underline{16k} - \underline{12h} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25k - 14h + \frac{3}{4} = 0 \\ 50k - 25h + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25k - 14h + \frac{3}{4} = 0 \\ 3h = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \frac{-3}{100} \\ h = 0 \end{cases}$$

$$\vec{p_Q} = \left(\frac{-60}{100}, \frac{-84}{100}, \frac{-12}{100} \right)$$

$\Rightarrow$ possiamo prendere $(5, 7, 1)$

Come punto di passaggio

$$P = (1, 0, 0)$$

$$\rho \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 7t \\ z = t \end{cases}$$

b) il vettore direzionale di r è

$$(2, -1, 0) \wedge (2, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (-1, -2, 2)$$

il vettore ortogonale al piano è:

$$(3, -1, 1)$$

$$(-1, -2, 2) \cdot (3, -1, 1) = -3 + 2 + 2 \neq 0$$

la retta non è parallela al piano $\Rightarrow$ retta e piano si intersecano, dunque la distanza è 0.

$$2) \quad f(p(x)) = (p(1), p'(0)) = (0, 1)$$

$$\text{se } \begin{cases} p(1) = 0 \\ p'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = -a_2 - a_3 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -a_2 - a_3 + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

ho due parametri liberi: a_2 e a_3

$$\Rightarrow \dim \ker f = 2$$

$$\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f + 2 = 4 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$$

f è su poiché $\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$
 f non è 1-1 poiché $\dim \ker f > 0$

Poiché $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, ogni base
 di $\mathbb{R}^2$ (anche la canonica) è

base per $\text{Im} f$.

base per $\text{Ker} f$ si ottiene ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = 0 \\ a_3 = 1 \end{array} \right.$$

Dunque abbiamo:

$$\left\{ -1 + x^2, -1 + x^3 \right\}.$$

3) a)

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

$\Rightarrow S_1$ è dipendente, dunque
non si può completare ad una
base

S_2 :

$$P \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \bar{e}$ indipendente, si può
completare ad una base

Poiché $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

e tale minore occupa le ultime
due colonne, posso completarlo
con i vettori della base

canoniche : $(1, 0, 0, 0)$ e
 $(0, 1, 0, 0)$.

b) possiamo usare l'isomorfismo
 con $\mathbb{R}^3$ e dunque:

$$1 - x + x^2 \rightarrow (1, -1, 1)$$

$$1 - x \rightarrow (1, -1, 0)$$

$$2 + x^2 \rightarrow (2, 0, 1)$$

$$3 - x - x^2 \rightarrow (3, -1, -1)$$

$$P \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Si vede subito che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \neq 0 \Rightarrow \text{le prime}$$

3 righe sono indipendenti

$\Rightarrow$ i primi 3 polinomi sono
una base per $\mathbb{R}_2[x]$.

$$c) \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{13} = 0 \\ a_{21} + a_{23} = 0 \\ a_{31} + a_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -a_{13} \\ a_{21} = -a_{23} \\ a_{31} = -a_{33} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ho 6 variabili libere, dunque
la dimensione è 6.

une base $\mathcal{B}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Domande:

1) $\{ (1, 0, 1), (2, 1, 0), (4, 1, 2) \}$

non è una base di $\mathbb{R}^3$,

perché: $2(1, 0, 1) + (2, 1, 0) =$
 $(4, 1, 2).$

Ma $2f(1, 0, 1) + f(2, 1, 0)$

$= (1, -3, 5) \neq f(4, 1, 2).$

2) Una matrice A si dice
diagonalizzabile se

è simile ad una
matrice diagonale D .

Questo si verifica se la somma delle molteplicità geometriche è uguale all'ordine della matrice.

$$3) \text{ se } p(A) = m \leq n$$

$$A' \in m \times (n+1)$$

il suo rango dunque non può eccedere $m \Rightarrow$

$$p(A') \leq m$$

$$\Rightarrow p(A) = p(A') = m \quad \forall \underline{b} \in \mathbb{R}^m$$

(dunque non dipende dai termini noti)

4) Il sistema deve essere omogeneo, con n incognite e la matrice dei coefficienti deve avere rango $n-k$.

5) Si osserva che

$$\underline{I}_n^T = \underline{I}_n$$

dunque:

$$\begin{aligned} \underline{\det(\underline{A}^T - \lambda \underline{I}_n)} &= \det(\underline{A}^T - \lambda \underline{I}_n^T) \\ &= \det\left((\underline{A} - \lambda \underline{I}_n)^T\right) = \end{aligned}$$

$$\underline{\det(A - \lambda I_n)}$$

$\Rightarrow A$ e A^T hanno lo stesso
polinomio caratteristico,
quindi gli stessi autovalori.