Esercizi di algebra lineare

1. In $\mathbb{R}_3[x]$, sia V il sottospazio dei polinomi che si annullano in 1, cioè $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | p(1) = 0\}$ e $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | -p(x) = p(-x)\}$. Determinare la dimensione e una base di $V, W, V + W, V \cap W$.

2. **a)** Dire se l'insieme $S = \langle(1, 0, 1, 2), (1, 2, -2, 1)\rangle$ è un insieme di generatori per il sottospazio $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 = x_4\}$ motivando la risposta.

   b) Dire se $S = \{(1, 2, 2, 0), (-2, -4, 1, 0)\}$ si può completare ad una base di $\mathbb{R}^4$ e in caso di risposta affermativa farlo.

3. Determinare l'applicazione lineare (quindi una matrice che la rappresenti rispetto a dei riferimenti a vostra scelta) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $(1, 0, 1), (2, 3, 1) \in KerL$ e $L(1, 0, 0) = (1, 1, 1, 1)$. Determinare $L(1, 1, 2)$ e $L^{-1}(2, 2, 2, 2)$.

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, dire quali tra i seguenti vettori sono autovettori di A e qual è l'autovalore associato:

   - $(0, 0, 0, 0)$
   - $(1, 1, 1, -1)$
   - $(0, 1, 0, 0)$
   - $(1, 0, 4, 1)$

5. In $\mathbb{R}^5$, sia $V = \langle(1, 0, 2, 0, 4), (2, 0, 1, 1, -1), (4, 0, 5, 1, 7)\rangle$. Scrivere un sistema che ha V come soluzione. Completare una base di V ad una base di $\mathbb{R}^5$. Trovare l'intersezione fra V e $U = \langle(1, 0, 0, 2, 0), (-1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 0, 0)\rangle$.

6. Sia $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base per lo spazio vettoriale V e $B_U = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base per lo spazio U. Data $L : V \longrightarrow U$ tale che $L(v_1) = \underline{0}$, $L(v_2) = u_1 - u_2$, $L(v_3) = u_1 + u_2 - 4u_3$, dire qual e' la matrice che rappresenta L rispetto a tali basi, la dimensione e una base per ImL e $KerL$. Determinare $L(v_1 + v_2 - v_3)$.

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, trovare una matrice diagonale D simile ad A e la matrice P tale che $D = P^{-1}AP$

8. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che fissata la base $B_1 = \{(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$ nel dominio e $B_2 = \{(1,0,0),(0,2,1),(0,-1,1)\}$ nel codominio, essa è rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare $L(1,1,1)$, dimensione e una base per ImL e $KerL$.

9. Nello spazio delle matrici quadrate di ordine 3, sia V il sottospazio delle matrici antisimmetriche, cioè le matrici A tali che $A = -A^T$, e W il sottospazio delle matrici A tali che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trovare la dimensione e una base per $V + W$ e $V \cap W$.

10. Trovare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $(1,1,0)$ è autovettore con autovalore associato -1 e $V : \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$ sia contenuto in $KerL$. L è diagonalizzabile? E' inettiva o suriettiva?

11. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applaicazione lineare tale che $L(1,1,0) = (2,4,-1), L(2,1,1) = (1,0,0)$. Trovare $L(0,1,-1)$ e $L(0,0,0)$. Si può avere $\dim KerL = 2$? Giustificare la risposta.

12. In ciascuno dei seguenti casi, calcolare la dimensione e una base del sottospazio U:

    a) $U \leq \mathbb{R}_3[x]$, $U = \{p(x) | p(x) = p(-x)\}$.

    b) $U \leq \mathbb{R}_2[x]$, $U = \langle x - 2, x^2 + 2x, 4 + x^2 \rangle$.

    c) $U \leq M_{2,2}(\mathbb{R})$, $U = \{A | AB = CA\}$, con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    d) $U \leq V$, V è uno spazio vettoriale astratto con base $\{u, v, w, z\}$ e $U = \langle u + v, v + w, w + z, z + u \rangle$.

13. **a)** Dato il sistema: $\begin{cases} x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = \lambda \\ \lambda x_1 + 2(\lambda - 1)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = \lambda^2 - 2 \end{cases}$ dire per quali valori del parametro λ il vettore $(0,1,1,-1)$ è soluzione.

    b) Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, se A è una matrice quadrata di ordine n, posso concludere che il sistema sia determinato, indeterminato o incompatibile? Giustificare la risposta.

    c) Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, se A è una matrice 3×4 e $\rho(A) = 3$, posso concludere che il sistema sia determinato, indeterminato o incompatibile? Giustificare la risposta.

    d) Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$, se A è una matrice 3×4 e $\rho(A) = 2$, posso concludere che il sistema sia determinato, indeterminato o incompatibile? Giustificare la risposta.

    e) Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, se A è una matrice 4×3 e $\rho(A) = 3$, posso concludere che il sistema sia determinato, indeterminato o incompatibile? Giustificare la risposta.

14. Nello spazio delle matrici $M_{3,3}(\mathbb{R})$, sia V il sottospazio delle matrici simmetriche e U delle matrici a traccia nulla, cioè delle matrici tali che $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$. Qual è la dimensione di V? Qual è la dimensione di U? Trovare base e dimensione di $V \cap U$.

15. Dato $U = \langle (1,2,3,-6), (2,4,-2,-4) \rangle$, rappresentare U in forma cartesiana.

16. Sia L l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche di entrambi gli spazi. Determinare $L(2,1,3)$. Determinare il vettore v di $\mathbb{R}^3$ tale che v sia ortgonale a $(1,1,0)$ e $L(v) = (2,0)$.