

① Il piano per A e B
e ortogonale a π ha
come punto di passaggio A
oppure B e come vettori
direzionali $\overrightarrow{AB}$ e il vettore
normale del piano (a, b, c)

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 9, -5)$$

$$(a, b, c) = (2, -1, 1)$$

$$\pi: \begin{cases} x = 2 - 3h + 2k \\ y = -5 + 9h - k \\ z = 3 - 5h + k \end{cases}$$

② Per trovare il piano
contenente r e parallelo
a s bisogna considerare
il fascio di piani per r

$$\lambda(x - y + z - 2) + \mu(x + 2z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + \mu)x - \lambda y + (\lambda + 2\mu)z - 2\lambda - \mu = 0$$

un piano del fascio è
parallelo a s se

(a, b, c) di tale piano
è ortogonale al vettore
direttore di s V_s cioè

$$(a, b, c) \cdot V_s = 0$$

Dunque :

$$(\lambda + \mu, -\lambda, \lambda + 2\mu) \cdot (2, -1, 1)$$

$$= 2\lambda + 2\mu - \lambda + \lambda + 2\mu = 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda + 4\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu$$

prendiamo $\mu = 1$ e $\lambda = -1$

dunque

$$y + z - 1 = 0$$

(2) La matrice che
rappresenta f rispetto alle
base di autovettori
 $\{(1, 3, 1, 0), (0, 2, 0, 1),$

$$\{(-1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0)\}$$

$$\bar{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\dim \operatorname{Im} f = p(A) = 2$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - p(A) = 4 - 2 = 2$$

$$\operatorname{Ker} f = V_0 = \text{autospatto}$$

associato a 0 $\Rightarrow$ una

base $\bar{e}$ costituita da
due autovettori dati associati
a 0 : $\{(1, 3, 1, 0), (0, 2, 0, 1)\}$

Come base associata a $\operatorname{Im} f$

possiamo prendere gli altri
due autovettori: $\{(-1, 0, 0, 1),$
 $(1, 1, 0, 0)\}$.

Per trovare $f'(0, 1, 0, 1)$
dovremo prima scrivere
 $(0, 1, 0, 1)$ come combinazione
lineare dei vettori della
base scelta:

$$\begin{aligned}(0, 1, 0, 1) &= h_1(1, 3, 1, 0) + \\ &h_2(0, 2, 0, 1) + h_3(-1, 0, 0, 1) \\ &+ h_4(1, 1, 0, 0) = \\ &= \begin{pmatrix} h_1 - h_3 + h_4, & 3h_1 + 2h_2 + h_4, \\ h_1, & h_2 + h_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 - h_3 + h_4 = 0 \\ 3h_1 + 2h_2 + h_4 = 1 \\ h_1 = 0 \\ h_2 + h_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0 \\ -h_3 + h_4 = 0 \\ 2h_2 + h_4 = 1 \\ h_2 + h_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0 \\ h_3 = h_4 \\ h_2 = -\frac{1}{2}h_4 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}h_4 + \frac{1}{2} + h_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_3 = h_4 \\ h_2 = -\frac{1}{2}h_4 + \frac{1}{2} \\ \frac{h_4}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0 \\ h_3 = 1 \\ h_2 = 0 \\ h_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0, 1, 0, 1) = (-1, 0, 0, 1) + (1, 1, 0, 0)$$

Bisogna risolvere il
sistema:

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_3 = 1 \\ -3x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni} = \left\{ (x_1, x_2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) \right.$$

$$\left. x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

nella base scelta otteniamo

$$x_1 (1, 3, 1, 0) + x_2 (0, 2, 0, 1)$$

$$+ \frac{1}{2} (-1, 0, 0, 1) = \frac{1}{3} (1, 1, 0, 0)$$

$$= f'(0, 1, 0, 1) \text{ el vettore}$$

di x_1 e x_2 in $\mathbb{R}$.

$$(3) \quad U = \left\{ (x_2 - x_3, x_2, x_3, x_4), \right. \\ \left. x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Dunque $\dim U = 3$ e una
sua base $\tilde{e}$:

$$\left\{ (1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), \right. \\ \left. (0, 0, 0, 1) \right\}.$$

$$\underline{x} \in V \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\underline{x} &= h_1(1, 0, 1, 1) + h_2(2, 1, 0, 1) \\ &= (\underbrace{h_1 + 2h_2}_{x_1}, \underbrace{h_2}_{x_2}, \underbrace{h_1}_{x_3}, \underbrace{h_1 + h_2}_{x_4})\end{aligned}$$

$$\underline{x} \in U \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\underline{x} \in U \cap V \Leftrightarrow$$

$$h_1 + 2h_2 - h_2 + h_1 = 0$$

$$2h_1 + h_2 = 0$$

$$\Rightarrow h_2 = -2h_1$$

ho um sdo parametro
livre $\Rightarrow \dim U \cap V = 1$

sostituendo $h_2 = -2h_1$
in $(h_1 + 2h_2, h_2, h_1, h_1 + h_2)$
otengo .

$$(-3h_1, -2h_1, h_1, -h_1)$$

Dunque ottengo una base
per $h_1 = 1$

$$\{(-3, -2, 1, -1)\}$$

Domande

① $U^\perp$ è l'insieme dei vettori
di $\mathbb{R}^n$ ortogonali ad ogni
vettore di U . $\dim U^\perp = n - k$

$$(2) \quad \rho(A)=3 \Rightarrow \rho(A') \geq 3$$

$$A' \in 3 \times 4 \Rightarrow \rho(A') \leq 3$$

$\Rightarrow \rho(A')=3$ e quindi
il sistema è indeterminato
con ∞^1 soluzioni

(3) S_1 potrebbe essere

dipendente in quanto

$\{\underline{0}, v\}$ è un insieme

di due vettori ortogonali;

ma contenendo $\underline{0}$ è un
insieme dipendente.

S_2 è sempre indipendente
in quanto autovettori
associati ad autovalori
distinti sono indipendenti

$$(4) \quad p(A^2) \leq p(A) = 2$$
$$p(-A) = p(A) = 2$$

$$(5) \quad \text{se } A = P D P^{-1}$$

$$\text{allora } 3A = 3 P D P^{-1} =$$
$$= P (3D) P^{-1} \quad \text{e}$$

$3D$ è ancora diagonale
 $\Rightarrow 3A$ è diagonalizzabile.