Prova di esame 4

Svolgere la seguente prova in 2 ore e 30 minuti. Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato.

1. **a)** Determinare la retta r per $P = (1, 0, 1)$ e parallela ai piani $x - y + z - 1 = 0$ e $2x + y - z + 3 = 0$.

   b) Determinare la retta ortogonale e incidente $r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, trovare una matrice diagonale D simile ad A e la matrice P tale che $D = P^{-1}AP$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $f(1, 2, 1) = (1, 0, 2, 0)$, $f(0, -1, 2) = (2, 4, 5, 1)$ e $f(2, 1, 1) = (0, 4, 1, 1)$. Trovare la dimensione e una base per Imf e $Kerf$. Nello spazio $M_{3,3}(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 3, siano U il sottospazio delle matrici simmetriche, cioè $U = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) | A = A^T$ e V il sottospazio delle matrici a traccia nulla, cioè $V = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) | a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$. Determinare la dimensione di U e V e determinare la dimensione ed una base di $U \cap V$.

Domande (si ricorda che le risposte non giustificate NON SARANNO RITENUTE VALIDE):

1. Sia A una matrice di determinante d e rango p. Cosa posso dire del rango e del determinante di A^2?

2. Sia A una matrice quadrata con autovalore -1 con molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica di -1 può essere 0,1 o 2? Perchè?

3. Dare un esempio di sistema lineare le cui soluzioni formano un sottospaio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$.