Prova di esame 5

1. **a)** Trovare il piano contenente $r: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ per $P = (-1, 0, 1)$.

   b) Determinare la distanza fra $r: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ e $\pi : 2x - y + z = 0$.

2. Nello spazio dei polinomi $\mathbb{R}_3[x]$, sia U il sottospazio dei polinomi che si annullano in -1 e V il sottospazio dei polinomi $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ tali che $p(x)'$ si annulla in 0. Determinare la dimensione di U e V e determinare la dimensione ed una base di $U \cap V$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1, 2, 1) = (1, 0, 2, 0)$, $f(0, -1, 2) = (2, 4, 5, 1)$ e $f(2, 1, 1) = (0, 4, 1, 1)$. Trovare la dimensione e una base per Imf e dire se f è suriettiva o iniettiva.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, spiegare perché è diagonalizzabile e trovare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice P tale che $D = P^{-1}AP$. In caso di risposta negativa, spiegare perché non è diagonalizzabile e determinare una base per ogni autospazio.

Domande (le risposte non giustificate non saranno considerate valide):

1. Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare tale che A sia 2×3. Posso dire a priori che il sistema sia determinato,indeterminato o incompatibile?

2. Dire quali tra questi è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^3$: $S_1 = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$, $S_2 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $S_3 = \{(1, 2, -2), (-4, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 1, 0)\}$.

3.

4. Sia $f : V \to U$ una funzione lineare definita tra due spazi vettoriali, sia $u \in U$ e $f^{-1}(u)$ la controimmagine di u. Quanti vettori contiene $f^{-1}(u)$? Uno, nessuno, alcuni, infiniti?