Prova di esame 6

Esercizi:

1. **a)** Determinare un'equazione per il piano α contenente $r : \begin{cases} x = -1 + 3h \\ y = 2 + h \\ z = -2h \end{cases}$, con $h \in \mathbb{R}$, e ortogonale a $\pi : 2x + y - z = 0$.

   b) Determinare un'equazione per i piani paralleli a $r : \begin{cases} x = -1 + h \\ y = 2 + h \\ z = -2h \end{cases}$, con $h \in \mathbb{R}$, e a $s : \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ a distanza 1 dal punto P di coordinate $(0, 1, 1)$.

2. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato da $\{(0,1,2,0,0),(2,1,0,5,1),(2,3,4,5,1)\}$ e sia $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 - x_2 + x_4 - 3x_5 = 0, 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base per: $V, W, V \cap W, V + W$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $(1,3,1,0)$ e $(0,2,0,1)$ siano autovettori associati a 0, $(-1,0,0,1)$ un autovettore associato a 2, $(1,1,0,0)$ un autovettore associato a -3. Trovare base e dimensione di Imf e $Kerf$. Trovare $f^{-1}(0,1,0,1)$.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. La matrice A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, trovare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice P tale che $D = P^{-1}AP$.

Domande:

1. Sia $A = u \cdot v^T$, con $u, v \in \mathbb{R}^3$, entrambi non nulli, intesi come vettori colonna. Che ordine ha la matrice A? Che rango ha?

2. Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k. Enunciare la definizione di $U^\perp$ e dire che dimensione ha.

3. Dire quali tra i seguenti insiemi sono un insieme di generatori per lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}_2[x]$: $S_1 = \{1 - x + 2x^2, x - 3x^2\}$, $S_2 = \{1 + x + x^2, 2 - x - x^2, x + x^2, 1 - x^2\}$.