Matrice di Vandermonde

La matrice di Vandermonde di ordine n è una matrice quadrata tale che l'elemento che si trova nella posizione (i,j) è a_i^{j-1}, dunque del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Teorema $\det A = \prod_{n \geq i > h \geq 1} (a_i - a_h) = (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) \cdots (a_n - a_1)(a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - a_{n-3}) \cdots (a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)$.

Dimostrazione Il teorema si dimostra per induzione. Per $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$ e $\det A = a_2 - a_1$, quindi il teorema è vero per $n = 2$. Supponiamo che sia vero per le matrici di Vandermonde di ordine $n-1$. Sia A la matrice di Vandermonde di ordine n e sia A' la matrice che si ottine da A sottraendo ad ogni colonna (dalla seconda in poi) la colonna precedente moltiplicata per a_1. Dunque la matrice A' si ottiene da A mediante una trasformazione elementare che non cambia il determinante, quindi $\det A = \det A'$. Si ha $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{pmatrix}$, quindi $\det A' =$

$$\det \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{pmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n -$$

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix}$ e quest'ultima è una matrice di Vandermonde di ordine $n-1$, quindi per essa abbiamo supposto che l'asserto sia vero. Quindi $\det A = \det A' = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \prod_{n \geq i > h \geq 2} (a_i - a_h) = \prod_{n \geq i > h \geq 1} (a_i - a_h)$.

Corollario 1 $\det A = 0$ se e solo se $a_i = a_h$ per qualche $i, h \in \{1, 2, \ldots\}$, quindi se A ha almeno due righe uguali.

Corollario 2 Il rango di A è uguale al numero di elementi distinti in $\{a_1, a_2, \ldots, n\}$.

Dimostrazione Supponiamo che ci siano esattamente p righe distinte in A. La sottomatrice M individuata da tali p righe e dalle prime p colonne di A è una matrice di Vandermonde con righe distinte, quindi $\det M \neq 0$. Una qualsiasi sottomatrice quadrata di ordine maggiore di p ha almeno due righe uguali, quindi è una matrice con determinante nullo. Ne segue che il rango di A è p.