1)

le rette $r: \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = u \\ y = -2u + 1 \\ z = 2u \end{cases}$

Trovare la loro distanza e l'angolo formato da esse.

DISTANZA: capire posizione rette.

$v_r : (2, -1, 1) \wedge (1, 0, 1) = (-1, -1, 1)$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$v_s = (1, -2, 2)$

v_s non è proporzionale a v_r (non sono uno multiplo dell'altro)

$\Rightarrow$ r e s non sono parallele

$r \cap s : \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + z = 1 \\ x = u \\ y = -2u + 1 \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + 2u - 1 + 2u = 2 \\ u + 2u = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6v = 3 \\ 3v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$r \cap s = \emptyset$

$r \cap s = \emptyset$ e $r \not\parallel s$ $\Rightarrow$ r e s sono sghembe.

piano per r parallelo a s

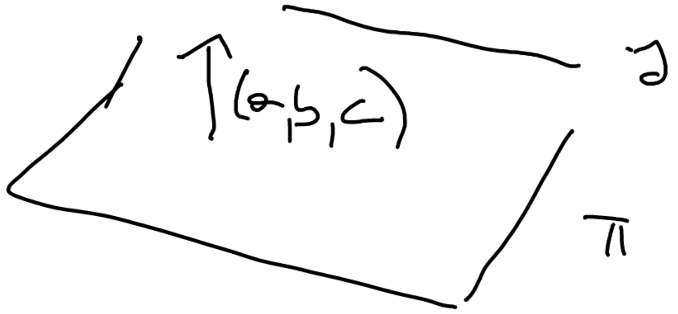
piano per r $\Rightarrow$ piano del fascio di piani per r

$$\lambda\,(2x - y + z - 2) + \mu\,(x + z - 1) = 0$$

$$x\,(2\lambda + \mu) - \lambda y + z\,(\lambda + \mu) - 2\lambda - \mu = 0$$

voglio il piano parallelo a s

$$\Rightarrow \underbrace{(2\lambda + \mu,\ -\lambda,\ \lambda + \mu)}_{\text{vettore normale del piano}} \cdot (1, -2, 2) = 0$$



$\pi \parallel s$

(a,b,c) ortog. a π deve essere ortogonale anche a s.

$$2\lambda + \mu + 2\lambda + 2\lambda + 2\mu = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6\lambda + 3\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -2\lambda$$

$\lambda = 1$ e $\mu = -2$

$$\Rightarrow \quad -y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad y + z = 0$$

piano per r parallelo a s

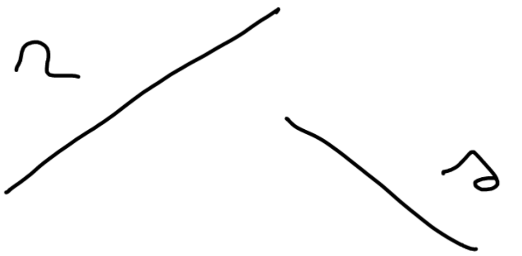
$$d(r, s) = d(\pi, s) = d(\pi, P)$$

$s \parallel \pi$

P = punto qualsiasi di s

$P = (0, 1, 0)$

$$d(P, \pi) = \frac{|1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



si pone r in forma parametrica

$P \in r$, $Q \in s$: punti mobili (che dipendono da un parametro)

$\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $\overrightarrow{PQ} \perp s$

$\Rightarrow$ trovo i punti P e Q

$d(r,s) = d(P,Q) = \overline{PQ}$

$Q = (u, -2u+1, 2u)$

$P \in r \Rightarrow r = \begin{cases} x = -h+1 \\ y = -2h+2+h-2 = -h \\ z = h \end{cases}$

$P = (-h+1, -h, h)$

ANGOLO fra le due rette

α = angolo formato da v_r e v_s

$$\cos\alpha = \frac{(-1,-1,1)\cdot(1,-2,2)}{\|(-1,-1,1)\|\cdot\|(1,-2,2)\|}$$

$$= \frac{-1+2+2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{9}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Classificare la conica di equazione:

$$\underline{x^2+y^2+6xy}-2x+2y=0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x & 1 & 3 & -1 \\ y & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} = A$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la conica è non degenere $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

<u>in questo caso $\det A \neq 0$</u>

per sapere che tipo di conica abbiamo, basta calcolare $\det A_1 = 1 - 9 = -8 < 0$

$\Rightarrow$ iperbole.

2) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(1,2,0,0)$ e $(-1,1,0,1)$ autovettori associati a 0 $\Rightarrow$ sono due vettori indipendenti $\Rightarrow$ $\mu g(0) \geq 2$

$(0,0,1,1)$ autovettore associato a -2

$\Rightarrow$ $\mu g(-2) \geq 1$

$(0,1,0,-3)$ autovettore associato a 3.

$\Rightarrow$ $\mu g(3) \geq 1$

$4 \geq \mu g(0) + \mu g(-2) + \mu g(3) \geq 4$

$\hookrightarrow$ la matrice è di ordine 4

la funzione è diagonalizzabile.

$\Rightarrow$ rispetto alla base formata dagli autovettori (→ DOMINIO e CODOMINIO), la funzione si rappresenta con la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

oppure possiamo considerare la base formata dagli autovettori nel dominio e la base canonica nel codominio.

$$f(1,2,0,0) = 0 \cdot (1,2,0,0) = (0,0,0,0)$$
$$f(-1,1,0,1) = 0 \cdot (-1,1,0,1) = (0,0,0,0)$$
$$f(0,0,1,1) = -2\,(0,0,1,1) = (0,0,-2,-2)$$
$$f(0,1,0,-3) = 3 \cdot (0,1,0,-3) = (0,3,0,-9)$$

$\boxed{f(v)=\lambda v}$ $v \neq \underline{0}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\dim \operatorname{Im} f = \rho(A) = \rho(D) = 2$$

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 4 - 2 = 2$

se f non ha autovalore $\lambda = 0$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

se f ha l'autovalore $\boxed{\lambda = 0}$

$\operatorname{Ker} f = V_0$ = autospazio associato a 0

$$V_0 = \langle \underbrace{(1,2,0,0), (-1,1,0,1)}_{\text{base per } \operatorname{Ker} f} \rangle = \operatorname{Ker} f$$

Per $\operatorname{Im} f$, bisogna considerare le 2 colonne indipendenti della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ base canonica nel codominio

$\Rightarrow$ base per $\operatorname{Im} f = \{(0,0,-2,-2), (0,3,0,-9)\}$

$$\text{Con } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nel codominio abbiamo la base formata da autovettori $= \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$(0,0,-2,0) \to 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$

$= -2 \cdot v_3 = (0,0,-2,-2)$

$(0,0,0,3) \to 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 3 \cdot v_4 = 3 \cdot (0,1,0,-3)$

$= (0,3,0,-9)$

$\Rightarrow$ base per $\mathrm{Im} f = \{(0,0,-2,-2), (0,3,0,-9)\}$

f diagonalizzabile e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ = base formata da autovettori di f

base per $\mathrm{Im} f = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$

sono tutti gli autovettori non associati a 0.

$\Rightarrow \{(0,0,1,1), (0,1,0,-3)\}$

$\{(0,0,2,2) ; (0,3,0,-9)\}$

f è invertibile se è IN e SU

non è nessuna delle due in questo caso

$\Rightarrow f$ non è invertibile.

$f^{-1}(0,1,1,-2) = ?$

$(0,1,1,-2) \in \operatorname{Im} f ?$

$\exists f^{-1}(0,1,1,-2) \Leftrightarrow (0,1,1,-2) \in \operatorname{Im} f$

$$\underline{(0,1,1,-2)} \in \underline{\langle \overset{v_3}{(0,0,1,1)}, \overset{v_4}{(0,1,0,-3)} \rangle}$$

$$\rho\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3^a - 1^a}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = 2$$

$\Rightarrow \underline{(0,1,1,-2)} \in \operatorname{Im} f$

Se vogliamo usare D:

$$D \cdot \underline{x} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]_{\text{Base autovettori}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(0,1,1,-2) = v_3 + v_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_3 = 1 \\ 3x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Soluzioni $= \left\{ \left(x_1, x_2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Nel dominio abbiamo la base di autovettori

$\Rightarrow \left(x_1, x_2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow$

$\Rightarrow x_1 v_1 + x_2 \cdot v_2 - \frac{1}{2} v_3 + \frac{1}{3} v_4 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow = f^{-1}(0, 1, 1, -2)$

$$f\left(x_1 v_1 + x_2 v_2 - \frac{1}{2} v_3 + \frac{1}{3} v_4\right) = (0, 1, 1, -2)$$

con la matrice A ho la base canonica nel codominio, quindi devo risolvere il sistema:

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_4 = 1 \\ -2x_3 = 1 \\ -2x_3 - 9x_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

x_1 e x_2 libere

$$\left(x_1, x_2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \to x_1 v_1 + x_2 v_2 - \frac{1}{2} v_3 + \frac{1}{3} v_4$$

(nel dominio abbiamo la base di autovettori)

---

3) $\mathbb{R}_3[x]$

$$V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, x p'(x) = p(x) \}$$

$$W = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, p(-1) = 0 \}$$

V, W, $V+W$, $V \cap W$.

V: $\boxed{x p'(x) = p(x)}$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

$$x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\cancel{a_1 x} + \underline{2a_2 x^2} + \underline{\underline{3a_3 x^3}} = \underline{a_0} + \cancel{a_1 x} + \underline{a_2 x^2} + \underline{\underline{a_3 x^3}} \quad \forall x$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 2a_2 = a_2 \\ 3a_3 = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ 2a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$p(x) = a_1 x$$

$$x \cdot p'(x) = x \cdot (a_1) = a_1 x = p(x)$$

$$V = \{ a_1 x \ , \ a_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim V = 1 \quad e \quad \text{base} = \{ \underset{a_1 = 1}{x} \}$$

$$W: \quad p(-1) = 0 \qquad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \underline{a_1 - a_2 + a_3}$$

$$W = \{ a_1 - a_2 + a_3 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 , \underline{a_1, a_2, a_3} \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim W = 3$$

$$\text{base} = \{ \underset{\substack{a_1 = 1 \\ a_2 = a_3 = 0}}{1 + x} , \underset{\substack{a_1 = a_3 = 0 \\ a_2 = 1}}{-1 + x^2} , \underset{\substack{a_1 = a_2 = 0 \\ a_3 = 1}}{1 + x^3} \}$$

$$V \cap W = ? \qquad V: \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$W: \quad a_0 = a_1 - a_2 + a_3$$

$$V \cap W = \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ 0 = a_1 - 0 + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$V \cap W = \{\underline{0}\}$ non ha base

$$\dim V+W = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$$
$$= 1 + 3 - 0 = 4$$

$\Rightarrow \dim V+W = 4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$

$\Rightarrow V+W = \mathbb{R}_3[x]$

come base posso prendere la base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$

$B_V = \{x\}$ $\qquad B_W = \{1+x, -1+x^2, 1+x^3\}$

$B_V \cup B_W = \{1+x, -1+x^2, 1+x^3, x\}$

bisognare estrarne i vettori indip

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \rightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$$\begin{array}{rl} 1+x \rightarrow & \\ -1+x^2 \rightarrow & \\ 1+x^3 \rightarrow & \\ x \rightarrow & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

estrarre le righe indip

Domande

1) $v_1 = (0,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$; $v_3 = (-1,0,1)$

$V = \langle (1,0,0), (0,-1,0) \rangle \rightarrow \underline{x_3 = 0}$

$U = \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$v_1 = \underline{0}$ è in ogni sottospazio

$\underline{v_2 \in V} \Leftrightarrow \quad \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ vero

$\underline{v_3 \notin V}$ perché $\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 > \dim V$

$v_2 \in U \Leftrightarrow (1,1,0)$ soddisfa $\underline{x_1 + x_2 + x_3 = 0}$

$v_2 \notin U$

$v_3 \in U$: sì $\quad (-1,0,1)$ è soluzione di $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

2) $V = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-1}{\sqrt{7}} \right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rangle$

Trovare le componenti di $(1,-2,2,0)$ rispetto alla base di V

$\boxed{(1,-2,2,0) \in V}$

la base è ortonormale!

$h_1 = (1,-2,2,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-1}{\sqrt{7}} \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{4}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$$

$$h_2 = (1,-2,2,0) \cdot \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(h_1, h_2) = (\sqrt{7}, \sqrt{2})$$

$$\sqrt{7}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-1}{\sqrt{7}}\right) + \sqrt{2}\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (1,-2,2,0)$$

3) Def di matrici simili e dire cosa hanno in comune.

A e B matrici quadrate di ordine n si dicono simili se $\exists$ una matrice invertibile P tale che

$$A = PBP^{-1}$$

hanno lo stesso determinante, rango, polinomio caratteristico e rappresentano lo stesso endomorfismo

4) Dire come si possono intersecare due piani nello spazio e PERCHÈ

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$\pi_2: \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$$\pi_1 \cap \pi_2: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

3 incognite e 2 equazioni $\Rightarrow$ MAI DETERMINATO $\Rightarrow$ $\pi_1 \cap \pi_2$ non è mai un punto.

sistema indeterminato $\Rightarrow$ ∞^1 soluzioni $\Rightarrow$ retta

sistema incompatibile $\Rightarrow$ nessuna soluzione $\Rightarrow$ $\pi_1 // \pi_2$ e $\pi_1 \neq \pi_2$

$$\Rightarrow \rho\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \quad e \quad \rho\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\pi_1 // \pi_2 \qquad\qquad \pi_1 \neq \pi_2$$

5) A: matrice quadrata di ordine 3 può avere $(1,0,1)$ = autovettore associato a 1 e $(-1,0,-1)$ = autovettore associato a 0? NO

$(1,0,1)$ è multiplo di $(-1,0,-1)$

autovettori associati ad autovalori distinti sono indipendenti

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Av = 1 \cdot v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{13} = 1 \\ a_{21} + a_{23} = 0 \\ a_{31} + a_{33} = 1 \end{cases}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_{11} - a_{13} = 0 \\ -a_{21} - a_{23} = 0 \\ -a_{31} - a_{33} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{13} = 1 \\ -a_{11} - a_{13} = 0 \\ a_{21} + a_{23} = 0 \\ a_{31} + a_{33} = 1 \\ -a_{31} - a_{33} = 0 \end{cases}$$

incompatibili

sistema impossibile

$$W = \langle 1+x, -1+x^2, 1+x^3 \rangle$$

$$h_1(1+x) + h_2(-1+x^2) + h_3(1+x^3)$$

$$= h_1 - h_2 + h_3 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 - h_2 + h_3 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{cases}$$