

1.a

La retta r può scrivere come intersezione di due piani:

π_1 : piano contenente r passante per O

π_2 : piano ortogonale a r passante per O

π_1 : si considera il fascio di piani per r :

$$\lambda(2x - y + z - 2) + \mu(x + z - 1) = 0$$

e si impone il passaggio per O :

$$(2\lambda + \mu)x - \lambda y + (\lambda + \mu)z - 2\lambda - \mu = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda - \mu = 0$$

$$\mu = -2\lambda$$

quindi, per $\lambda = 1$, ho $\mu = -2$

$$-y - z = 0 \Rightarrow y + z = 0$$

π_2 : si deve trovare il vettore
direzionale di r :

$$(2, -1, \lambda) \wedge (1, 0, 1) = (-1, -1, 1)$$

$$\Rightarrow -x - y + z + d = 0$$

imponendo il passaggio per
O ottengo $d = 0$

Dunque la retta cercata ha
equazione:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

1.5) È necessario trovare il vettore direzionale di entrambe le rette.

$$V_2: (1, -1, 1) \wedge (1, 0, 2) = (-2, -1, 1)$$

$$V_3: (2, -1, 1)$$

un piano $ax + by + cz + d = 0$
parallelo ad entrambe è
tale che (a, b, c) è

ortogonale sia a v_2 che a v_3

dunque possiamo prendere

$$(a, b, c) = (-2, -1, 1) \wedge (2, -1, 1)$$

$$= (0, -4, 4) \Rightarrow \text{quindi}$$

possiamo prendere $(0, -1, 1)$

π : $-y + z + d = 0$ deve

essere a distanza 1 da

$$P = (1, 1, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{|-1 + d|}{\sqrt{1+1}} = 1$$

$$\Rightarrow |d-1| = \sqrt{2}$$

$$d-1 = \pm \sqrt{2}$$

$$\pi_1: -y + z + 1 + \sqrt{2} = 0$$

$$\pi_2: -y + z + 1 - \sqrt{2} = 0$$



2) la matrice che rappresenta f rispetto alla base

$$B = \{ (1, 2, 0), (-1, 1, 0), (0, 1, -2) \}$$

del dominio e la canonica nel codominio $\tilde{e}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$f(2, 0, 1) = A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \text{le componenti di}$$

$$(2, 0, 1) \text{ rispetto a } B$$

$$\begin{aligned} (2, 0, 1) &= h_1 (1, 2, 0) + h_2 (-1, 1, 0) \\ &+ h_3 (0, 1, -2) = (h_1 - h_2, 2h_1 + h_2 \\ &+ h_3, -2h_3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 - h_2 = 2 \\ 2h_1 + h_2 + h_3 = 0 \\ -2h_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} h_1 = h_2 + 2 \\ 2h_2 + 4 + h_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ h_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 = -\frac{7}{6} + 2 = \frac{5}{6} \\ 3h_2 = -\frac{7}{2} \Rightarrow h_2 = -\frac{7}{6} \\ h_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(2,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} - \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} - \frac{49}{6} - \frac{3}{2} \\ \frac{7}{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{6} \\ -\frac{53}{6} \\ \frac{17}{6} \end{pmatrix}$$

$$\dim \ker f = 3 - \rho(A) = 3 - 2 = 1$$

Per trovare $\ker f$ bisogna prima risolvere il sistema

$$A \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

Riduco A a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - x_3 = \frac{x_3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni} = \left\{ \left(\frac{1}{2}x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3 \right), \right. \\ \left. x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Base} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

Perché nel dominio ha
la base B , una base
per $\ker f_{\bar{x}}$:

$$\frac{1}{2}(1, 2, 0) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0) + (0, 1, -2) \\ = \left(1, \frac{3}{2}, -2 \right)$$

3) Applica Gram-Schmidt

$$v_1 = \frac{(1, 0, 1, -1)}{\|(1, 0, 1, -1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1)$$

$$v_2' = (2, 1, 0, 1) - \left[(2, 1, 0, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1) \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1) =$$

$$= (2, 1, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 0, 1, -1) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}, 1, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} =$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{3}, 1, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)}{\sqrt{\frac{25}{9} + 1 + \frac{1}{9} + \frac{16}{9}}} =$$

$$= \left(\frac{5}{3}, 1, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) \cdot \frac{3}{\sqrt{51}}$$

$$= \left(\frac{5}{\sqrt{51}}, \frac{3}{\sqrt{51}}, -\frac{1}{\sqrt{51}}, \frac{4}{\sqrt{51}} \right)$$

Base ortonormale:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{5}{\sqrt{51}}, \frac{3}{\sqrt{51}}, -\frac{1}{\sqrt{51}}, \frac{4}{\sqrt{51}} \right) \right\}$$

le componenti di $(1, 1, -1, 2)$
rispetto a tale base si
trovano il prodotto

scalare:

$$h_1 = (1, 1, -1, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 0, 1, -1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 - 1 - 2) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$h_2 = (1, 1, -1, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{51}} (5, 3, -1, 4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{51}} (5 + 3 + 1 + 8)$$

$$= \frac{17}{\sqrt{51}}$$

Per trovare U in forma
canonica, basta imporre

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2$$

Vedremo che $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

dunque basta usare tale

minore:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} =$$

$$x_3 + 2x_2 - x_1 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} =$$

$$x_4 - x_2 - 2x_2 + x_1 = 0$$

$$U: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$



Domande:

1) A è diagonalizzabile
se è simile ad una matrice
diagonale D , cioè se $\exists$
una matrice invertibile P
ed una matrice diagonale
 D tali che

$$A = P D P^{-1}$$

Questo è possibile se e solo se $\exists$ una base di $\mathbb{R}^n$

(dove n è l'ordine della matrice) di autovettori di A , cioè se la ~~somma~~ delle molteplicità algebriche è uguale alla somma delle molteplicità geometriche che a suo volta deve essere uguale a n .

2) Il sistema deve essere lineare / omogeneo

e il rango della
matrice dei coefficienti
deve essere $m-k$

3) Una matrice quadrata
ha un autovalore uguale
a 0 se e solo se
il suo determinante è
nullo, dunque tale matrice
non è mai invertibile.

Una matrice con $(1, 0, 0)$
autovettore associato a
 $\lambda = 0$ è del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4) se $v \notin \text{Im} f$, $f^{-1}(v) = \emptyset$

se $v \in \text{Im} f$, allora

$$f^{-1}(v) = \{ \bar{v} + \text{Ker} f \} \text{ dove}$$

$\bar{v}$ è un fissato vettore
del dominio tale che

$$f(\bar{v}) = v$$

da cui

$f'(v)$ ha un solo vettore
 $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{ \underline{0} \} \Leftrightarrow f \text{ è}$
INIETTIVA

$f'(v)$ ha infiniti vettori
 $\Leftrightarrow f$ non è iniettiva
(perché $\text{Ker} f$ ha infiniti
vettori)

5) l'angolo θ si trova con
la formula:

$$\cos \theta = \frac{(1, 2, 1) \cdot (0, 1, 1)}{\| (1, 2, 1) \| \cdot \| (0, 1, 1) \|} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$