(1)

a) π_1: piano perpendicolare a r passante per $P=(1,2,3)$:

$$x - y + d = 0$$ tale che

$$1-2+d=0 \Rightarrow d=1$$

$$\pi_1: \quad x-y+1=0$$

π_2: piano contenente s per P:

$$\lambda(x+y-2z)+\mu(2x-3y+z)=0$$

tale che

$$\lambda(1+2-6)+\mu(2-6+3)=0$$

$$-3\lambda-\mu=0 \Rightarrow \mu=-3\lambda$$

$$\lambda=1 \quad , \quad \mu=-3$$

$$\pi_2: \quad x+y-2z-6x+9y-3z$$

$$=-5x+10y-5z=0$$

$$\pi_2: \quad x-2y+z=0$$

la retta cercata è

$$t: \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

5) La matrice associata alla conica è:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = A$$

$$\det A = \lambda \det \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$- \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{2} (-\lambda) =$$

$$= \lambda\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) + \frac{\lambda^3}{4}$$

$$= \lambda\left(\lambda - \frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\right) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ e

$\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{4+1} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ la conica è degenere per

$\lambda = 0, \ -2-\sqrt{5}, \ -2+\sqrt{5}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = -\lambda - \frac{\lambda^2}{4}$$

$$\det A_1 = 0 \iff \lambda = 0, -4$$

$\Rightarrow$ la conica è una parabola per $\lambda = -4$ ($\lambda = 0$ va escluso, poiché per quel valore la conica è degenere)

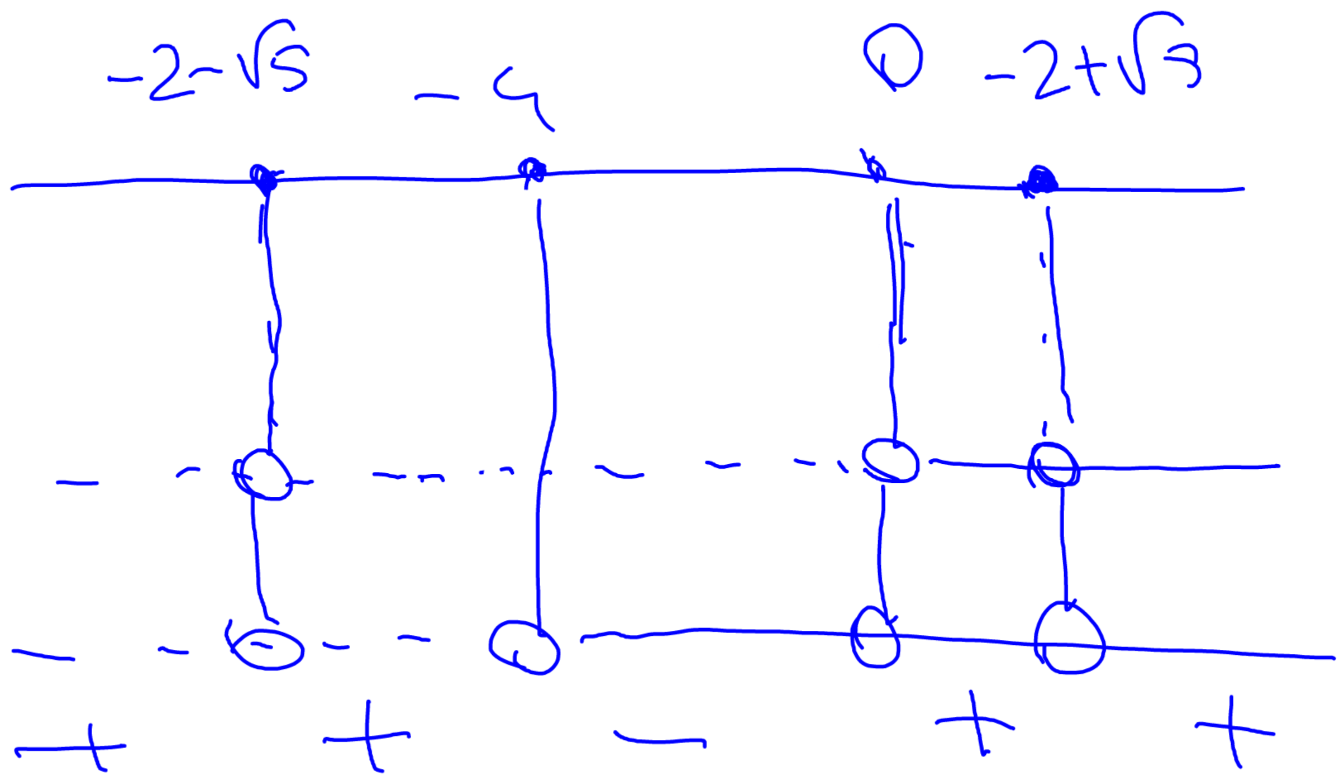
$$\det A_1 < 0 \iff$$

$$-\lambda - \frac{\lambda^2}{4} < 0 \iff$$

$$\frac{\lambda^2}{4} + \lambda > 0 \iff$$

$$\lambda^2 + 4\lambda > 0 \iff$$

$$\lambda(\lambda+4) > 0$$



è un'iperbole per

$$\lambda < -2-\sqrt{5} \quad \vee$$

$$-2-\sqrt{5} < \lambda < -4 \quad \vee$$

$$0 < \lambda < -2+\sqrt{5} \quad \vee$$

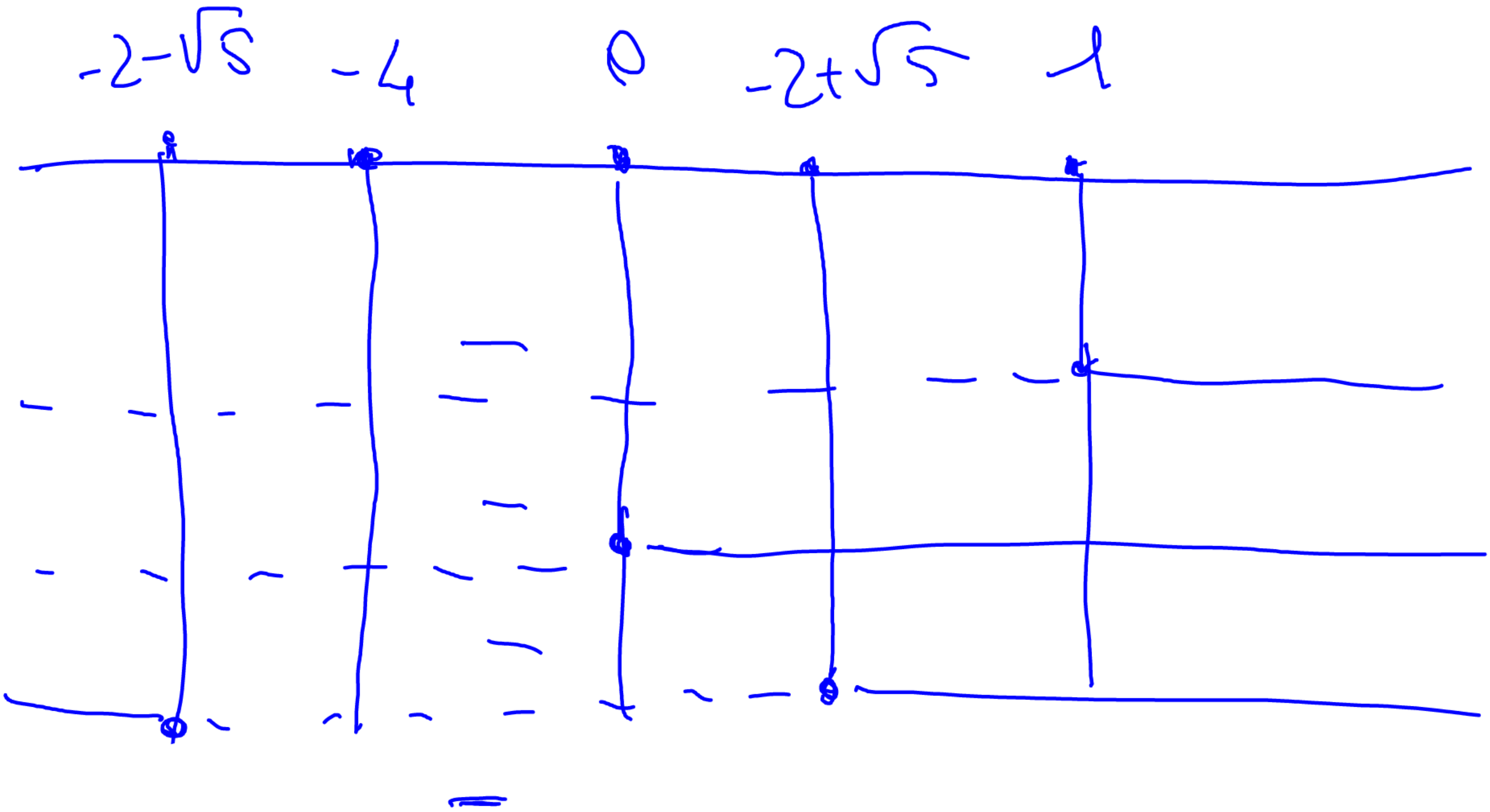
$$\lambda > -2+\sqrt{5}$$

$$\det A_1 > 0 \iff$$

$$-4 < \lambda < 0$$

$$Tr(A_1) \det A =$$

$$(\lambda-1)\lambda\left(\frac{\lambda^2}{4} + \lambda - \frac{1}{4}\right)$$



per $\lambda \in]-4, 0[$,

$$(\lambda-1)\lambda\left(\frac{\lambda^2}{4}+\lambda-\frac{1}{4}\right)<0$$

$\Rightarrow$ l'ellisse è reale

② a) $\dim V =$

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2R_2$$

$\Rightarrow \rho = 2 \Rightarrow \dim V = 2$

I due generatori di U sono sicuramente indipendenti $\Rightarrow \dim U = 2$

$$\dim(U+V) =$$

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

si vede facilmente che questa matrice ha determinante $\neq 0$

$\Rightarrow \dim U+V = 4$

Da Grassmann:

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$$

$4 = 2 + 2 - \dim U \cap V$

$\Rightarrow \dim U \cap V = 0$

$\Rightarrow U \cap V = \{\underline{0}\}$ e non

ha base

b) $p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \Rightarrow$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

$p'(0) = a_1$

$p'(0) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$

$$\Rightarrow U = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_1 = 0 \} = \{ a_0 + a_2 x^2 + a_3 x^3, \ a_0, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$$

$\dim U = 3$ e una base è $\mathcal{B} = \{ 1, x^2, x^3 \}$

3) $\det(A - \lambda I_3) =$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{con} \quad \mu_a(1) = 2$$

$$\text{e} \quad \lambda = 4 \quad \text{con} \quad \mu_a(4) = 1$$

$$V_1 : \left(A - I_3\right)\underline{x} = \underline{0}$$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 + 2x_3 = 0$$

$$V_1 = \left\{ (x_1, -2x_3, x_3),\ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$Mg(1) = 2 \Rightarrow$ la matrice è diagonalizzabile

base per $V_1 = \{ (1,0,0), (0,-2,1) \}$

$$V_4 : (A - 4I_3) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$V_4 = \{ (x, x, x), \ x \in \mathbb{R} \}$$

base per $V_4 = \{ (1,1,1) \}$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5

$$f(0,1,1) = (0,1,1)$$

$$f(1,0,2) = (0,0,0)$$

$$f(0,0,1) = (2,4,1)$$

$\{(0,1,1),\ (1,0,2),\ (0,0,1)\}$

è una base per $\mathbb{R}^3$

$$(1,-1,0) = h_1(0,1,1) + h_2(1,0,2)$$

$$+ h_3(0,0,1) =$$

$$(h_2,\ h_1,\ h_1+2h_2+h_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_2 = 1 \\ h_1 = -1 \\ h_1 + 2h_2 + h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} h_2 = 1 \\ h_1 = -1 \\ -1 + 2 + h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = -1 \end{cases}$$

$f(1,-1,0) = h_1 (0,1,1)$
$+ h_2 \cdot (0,0,0) + h_3 (2,4,1)$

$= -(0,1,1) - (2,4,1)$
$= (-2,-5,-2)$

la matrice associata a f rispetto alla base data è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

devo risolvere

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_1 = -3 \\ x_1 = -3 \end{cases}$$

Soluzioni $= \{ (-3, x_2, 1), x_2 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$

$$f^{-1}(2,1,-2) = -3\,(0,1,1) + x_2\cdot(1,0,2) + (0,0,1)$$

$$= (0,-3,-2) + x_2\,(1,0,2)$$

$$= (0,-3,-2) + \operatorname{Ker} f$$

Domande

1) A e B si dicono simili se $\exists$ una matrice invertibile P tale che

$$B = P^{-1} A P$$

A e B hanno lo stesso determinante, lo stesso rango, lo stesso polinomio caratteristico (quindi gli stessi autovalori) e rappresentano lo stesso endomorfismo

2) Si nota che la base è ORTONORMALE, dunque:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} (2,4,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ (2,4,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ (2,4,1)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{7}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

3) $\rho(A) = 3$

$A' = (A \ \underline{b})$ è una matrice $3 \times 5 \Rightarrow \rho(A') \leq 3$

poiché $\rho(A) \leq \rho(A')$, ottengo:

$$3 = \rho(A) \leq \rho(A') \leq 3$$

$$\Rightarrow \rho(A') = 3$$

$\Rightarrow$ il sistema è compatibile. Poiché ho 4 incognite, ho

$$\infty^{4-3} = \infty^1 \text{ soluzioni}$$