(1)

a) Il generico punto di r ha coordinate

$$(h+2,\ -1-3h,\ 2h)$$

applicando la formula per la distanza punto-piano, si ha:

$$\frac{|3(h+2)-1-3h+2h|}{\sqrt{9+1+1}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{|\cancel{3h}+6-1-\cancel{3h}+2h|}{\sqrt{11}}=1$$

$$|2h+5|=\sqrt{11}$$

$$2h+5=\pm\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\pm\sqrt{11} - 5}{2}$$

quindi ho il punto

$$P_1 = \left(2 + \frac{\sqrt{11}-5}{2}, -1 - \frac{3(\sqrt{11}-5)}{2}, \sqrt{11}-5\right)$$

e

$$P_2 = \left(2 + \frac{-\sqrt{11}-5}{2}, -1 - \frac{3(-\sqrt{11}-5)}{2}, -\sqrt{11}-5\right)$$

b) La matrice che rappresenta la conica è:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} x & y & 1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\det A = 2 - \lambda - \lambda + 2$$

$$= -2\lambda + 4$$

$$\det A = 0 \iff \lambda = 2$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

la conica è una parabola se e solo se non è degenere, dunque $\det A \neq 0$,

e se $\det A_{11} = 0$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$

$\det A_{11} = \alpha^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$

quindi è una parabola per $\alpha = -2$.

② la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rappresenta f rispetto alla base $B = \{(1,2,0), (0,1,1), (-1,0,1)\}$ del dominio e la base canonica nel codominio.

La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica in entrambi gli spazi allora sarà

$$A \cdot P$$

dove P è la matrice di passaggio dalla base canonica e B.

Poiché la matrice di passaggio da B alla canonica è data dai vettori di B messi per colonna, allora

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

un altro modo per ottenere la matrice desiderata, è scrivere il generico vettore (x_1, x_2, x_3) come combinaz.

lineare dei vettori di B

$(x_1, x_2, x_3) = h_1(1,2,0) + h_2(0,1,1) + h_3(-1,0,1) = (h_1 - h_3, 2h_1 + h_2, h_2 + h_3) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = h_1 - h_3 \\ x_2 = 2h_1 + h_2 \\ x_3 = h_2 + h_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_3 = h_1 - x_1 \\ h_2 = x_2 - 2h_1 \\ x_3 = x_2 - 2h_1 + h_1 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_3 = -x_1 + x_2 - x_3 - x_1 = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ h_2 = x_2 + 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ h_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 - x_3)(1,1,0)$$
$$+ (2x_1 - x_2 + 2x_3)(0,0,0) + (-2x_1 + x_2 - x_3)$$
$$(1,2,1) = (-x_1 + x_2 - x_3,$$
$$-x_1 + x_2 - x_3, 0) + (-2x_1 + x_2 - x_3,$$
$$-4x_1 + 2x_2 - 2x_3, -2x_1 + x_2 - x_3)$$

$$= (-3x_1 + 2x_2 - 2x_3, -5x_1 + 3x_2 - 3x_3,$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3)$$

dunque la matrice è:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I generatori per $\mathrm{Im} f$ sono

$$\{(1,1,0), (0,3,0), (1,2,1)\}$$

dunque una base per $\mathrm{Im} f$ è

$$\{(1,1,0), (1,2,1)\}$$

$$(3,4,1) \in \mathrm{Im} f \iff \rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - R_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ il rango

è 2, quindi $(3,4,1) \in \operatorname{Im} f$.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1 \Rightarrow$ per ottenere una base, basta trovare un vettore non nullo in $\operatorname{Ker} f$

Dal testo, sappiamo che

$$f(0,1,1) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ base per $\operatorname{Ker} f = \{(0,1,1)\}$.

3

a) un vettore di U è del tipo

$$h_1(1,0,1,1) + h_2(2,0,-1,1) =$$

$$= (h_1 + 2h_2, 0, h_1 - h_2, h_1 + h_2)$$

dunque

$$V \cap U = \begin{cases} h_1 + 2h_2 + h_1 - h_2 = 0 \\ 2h_1 + 4h_2 + \cancel{h_1} - h_2 - \cancel{h_1} - h_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2h_1 + h_2 = 0 \\ 2h_1 + 2h_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2h_1 + h_2 = 0 \\ h_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{cases}$$

$$V \cap U = \{(0,0,0,0)\}$$

b) V: $p(x) = p(-x)$

$\cancel{a_0} + a_1 x + \cancel{a_2 x^2} + a_3 x^3 =$

$\cancel{a_0} - a_1 x + \cancel{a_2 x^2} - a_3 x^3$

$2a_1 x + 2a_3 x^3 = 0 \Rightarrow$

$a_1 = a_3 = 0$

$p(x) \in V \Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_2 x^2$

U: $p(0) = 0$

$a_0 = 0 \Rightarrow p(x) \in U \Leftrightarrow$

$p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$V \cap U : \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \text{ eq di } V$$

$$a_0 = 0 \quad : \text{eq di } U$$

$\Rightarrow a_2$ libera

$\Rightarrow V \cap U = \{ a_2 x^2, a_2 \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow \dim V \cap U = 1$

e una base è $\{x^2\}$.

c) una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ha traccia nulla se

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

$$\Rightarrow a_{11} = -a_{22} - a_{33}$$

Dunque le matrici a traccia nulla sono i

$$\begin{pmatrix} -a_{22} - a_{33} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

i parametri liberi sono 8, dunque la dimensione è 8 e una base è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Domande:

1) Se A è diagonalizzabile, vuol dire che è simile ad una matrice quadrata D che ha gli autovalori di A sulla diagonale, dunque

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\rho(D) = 2$ e poiché A è simile a D, $\rho(A) = \rho(D) = 2$.

2) il vettore nullo non è autovettore in quanto un autovettore per definizione è diverso da $\underline{0}$.

Per quanto riguarda $(1,1,1,-1)$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (1,1,1,-1)$ è autovettore con autovalore associato 0.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (0, 1, 0, 0)$ è autovettore con autovalore associato 1.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

e $(11, 16, 11, 13)$ non è multiplo di $(1, 0, 4, 1)$.

3) La matrice data è una

matrice ortogonale in quanto le righe e le colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Quindi la sua inversa coincide con la sua trasposta.

4) i sistemi che si possono risolvere con Cramer sono i sistemi quadrati determinati, ossia:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

con A matrice $n \times n$ e $\det A \neq 0$

allora si avrà:

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

dove B_j è la matrice che si ottiene sostituendo la colonna $\underline{b}$ alla j-esima colonna di A.

5) Esempio di sistema incompatibile:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

esempio di sistema indeterminato:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

(x_3 variabile libera)