

Appunti di Analisi Matematica 1

Fabio Camilli

SAPIENZA, Università di Roma

<http://www.dmmm.uniroma1.it/~fabio.camilli>

Klaus Engel

Università degli Studi dell'Aquila

<http://people.disim.univaq.it/~klaus.engel>

(Versione del 17 luglio 2018)

L'*analisi matematica* è un ramo della *matematica* che si occupa tra l'altro

- dei *numeri reali*,
- dei *limiti* di *successioni*
- delle *serie numeriche*,
- delle *funzioni reali* e della loro *continuità*,
- del *calcolo differenziale* ed *integrale*.

Indice

Capitolo 0. Concetti Fondamentali	1
Insiemi	1
Proprietà dei Numeri Reali \mathbb{R}	2
Funzioni	4
Fattoriale e Coefficienti Binomiali	5
Formula del Binomio di Newton	6
Principio di Induzione	6
Capitolo 1. Successioni Numeriche	9
Convergenza, Divergenza e Irregolarità per Successioni	9
Regole per il Calcolo dei Limiti	12
Limiti e Ordinamento	14
Confronto tra Successioni	17
Capitolo 2. Serie numeriche	19
Convergenza e prime Proprietà	19
Serie a Termini Positivi	22
Serie a Termini di Segno Variabili	25
Capitolo 3. Funzioni Reali di una Variabile Reale	28
Operazioni e Composizione tra Funzioni	28
Proprietà di Funzioni Reali	29
Funzioni Elementari	31
Limiti delle Funzioni Reali	35
Capitolo 4. Funzioni Continue di una Variabile Reale	40
Funzioni Continue	40
Funzioni Continue su Intervalli	41
Altre Funzioni Invertibili	44
Funzioni Continue su Intervalli Chiusi e Limitati	46
Capitolo 5. Calcolo Differenziale di Funzioni di una Variabile	47
Derivata: Definizione e prime Proprietà	47
Regole per la Derivazione	50
Estremi Locali e il Teorema di Fermat	54
I Teoremi di Rolle e Lagrange	57
Conseguenze del Teorema di Lagrange	58
Le Regole di de l'Hospital	61
Approssimazione Lineare di Funzioni	63
La Formula di Taylor	65
La Formula di Taylor	65
Applicazioni della Formula di Taylor	69
Serie di Taylor	79
Studio di Funzione	80
Capitolo 6. Calcolo Integrale di Funzioni di una Variabile	87

Integrale: Definizione e prime Proprietà	87
Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale	91
Metodi di Integrazione	94
Integrazione di Funzioni Razionali	102
Calcolo di Aree Piane	105
Calcolo della Lunghezza di una Curva*	106
Calcolo di Volumi di Corpi di Rotazione*	107
Integrali Impropri	108
Capitolo 7. Funzioni Reali di Più Variabili: limiti e continuità	115
La Struttura di \mathbb{R}^N	115
Funzioni Reali di più Variabili Reali: Prime Proprietà	116
Limiti di Funzioni Reali di più Variabili Reali	117
Calcolo dei Limiti in \mathbb{R}^N	118
Continuità	121
Capitolo 8. Calcolo Differenziale per Funzioni Reali di più Variabili	122
I Concetti di Derivabilità in \mathbb{R}^N	122
Derivate di Ordine Superiore	127
Estremi in \mathbb{R}^N	128
Capitolo 9. Funzioni a Valori Vettoriali	133
Trasformazioni Regolari di Coordinate	134
Capitolo 10. Calcolo Integrale per Funzioni di più Variabili	138
Integrali Doppi: Definizione e prime Proprietà	138
Teorema di Fubini–Tonelli	140
Cambiamento di Variabili negli Integrali Doppi	143
Integrali Tripli	148
Capitolo 11. I numeri complessi	153
Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso	155
Radici di un numero complesso	156
Note	158
Appendice A. Appendice	159
Tre Principali Modi di Dimostrazioni	159
Elenco di alcuni Limiti Notevoli	160
Definizione alternativa dei Limiti per Funzioni	161
Elenco delle figure	162

Concetti Fondamentali

In questo capitolo introduttivo raccoglieremo alcuni concetti di matematica che servono successivamente ed inoltre stabiliremo le principali notazioni.

Insiemi

Intuitivamente un *insieme* è una raccolta di oggetti (chiamati *elementi*) distinguibili tra di loro che formano una totalità. Per indicare un insieme si usano generalmente lettere maiuscole A, B, C, \dots, X, Y, Z , per gli elementi invece lettere minuscole a, b, c, \dots, x, y, z .

Prima di fare esempi introduciamo alcune

NOTAZIONI. • Spesso useremo i cosiddetti *quantificatori*

$$\boxed{\forall = \text{“per ogni”}} \quad \text{e} \quad \boxed{\exists = \text{“esiste”}}$$

- Per evidenziare che $A = B$ per definizione scriviamo $A := B$ oppure $B =: A$.
- \Rightarrow indica un’implicazione.
- \nexists indica una contraddizione.
- \in indica il simbolo di appartenenza, \notin indica il simbolo di non-appartenenza.
- \subset, \subseteq indicano i simboli di inclusione.

Per definire un insieme ci sono in pratica 2 possibilità:

- elencando tutti gli elementi tra parentesi graffe, per esempio $A := \{1, 2, 3\}$, oppure
- attraverso una proprietà che caratterizza tutti gli elementi dell’insieme, per esempio $P := \{n : n \text{ è un numero primo}\} = \{n \mid n \text{ è un numero primo}\}$.

Consideriamo alcuni

ESEMPLI. • Siano $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 7, 8\}$, $C := \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, allora $2 \in A$, $5 \notin B$, $A \subseteq C$, $A \not\subseteq C$, $A \notin A$.

- L’insieme senza alcun elemento si chiama *insieme vuoto* e si usa la notazione $\emptyset := \{\}$.

Questa vista semplificata di insiemi, che comunque è sufficiente per i nostri scopi, porta facilmente a problemi come si vede dal seguente

ESEMPIO. *Paradosso di Russell:* Consideriamo l’insieme

$$A := \{X : X \text{ è un insieme tale che } X \notin X\}.$$

Ora per A stesso si deve verificare $A \in A$ oppure il contrario $A \notin A$. Però

- $A \in A \Rightarrow A \notin A$ poiché A per ipotesi non verifica la condizione che definisce gli elementi X di A , ma anche
- $A \notin A \Rightarrow A \in A$ poiché A per ipotesi verifica la condizione che definisce gli elementi X di A .

Operazioni tra insiemi. Dati due insiemi A e B chiamiamo

- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$ l’unione tra A e B ,
- $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ l’intersezione tra A e B ,
- $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ la differenza tra A e B ,
- $A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$ il prodotto cartesiano tra A e B , gli elementi (a, b) si chiamano *coppie ordinate*.

OSSERVAZIONE. Se A e B sono insiemi, allora

- vale sempre $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;
- in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$ e $A \times B \neq B \times A$;
- se A ha n elementi e B ha m elementi, allora $A \times B$ ha $n \cdot m$ elementi;
- definiamo $A^2 := A \times A$.

Consideriamo un

ESEMPIO. Se $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 7, 8\}$, allora $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1, 3\} =: C$, $A \times C = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$ con $3 \cdot 2 = 6$ elementi.

Insiemi Numerici. Definiamo i seguenti insiemi numerici

$\mathbb{N} := \{n : n \text{ è un numero naturale}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ = insieme dei *numeri naturali*,

$\mathbb{Z} := \{n : n \text{ è un numero intero}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ = insieme dei *numeri interi*,

$\mathbb{Q} := \{r : r \text{ è un numero razionale}\} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ = insieme dei *numeri razionali*,

$\mathbb{R} := \{x : x \text{ è un numero reale}\}$

= $\{p, \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots : p \in \mathbb{Z}, \alpha_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \forall k \in \mathbb{N}\}$ = insieme dei *numeri reali*.

ESEMPI. • $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (\rightarrow corso di Algebra e Geometria), $\sqrt{2} = 1,414213\dots$, cioè qui abbiamo $p = 1$, $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 3$.

- Oppure per $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vale

$$\pi = \underbrace{3}_{=p}, \underbrace{1}_{=\alpha_0}, \underbrace{4}_{=\alpha_1}, \underbrace{1}_{=\alpha_2}, \underbrace{5}_{=\alpha_3}, \underbrace{9}_{=\alpha_4}, \underbrace{2}_{=\alpha_5}, \underbrace{6}_{=\alpha_6} \dots$$

Proprietà dei Numeri Reali \mathbb{R}

- (1) In \mathbb{R} valgono per le operazioni somma “+” e prodotto “ \cdot ” tutte le regole dell’algebra, per esempio $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ vale

$$x + y = y + x, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Più precisamente si dice che $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un *campo* \rightarrow corso di Algebra e Geometria.

- (2) In \mathbb{R} esiste un’*ordinamento totale* “ $<$ ”, cioè per $x, y \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle relazioni

$$x = y, \quad x < y \quad \text{oppure} \quad y < x.$$

- (3) \mathbb{R} è *completo*, cioè “la retta reale non ha buchi”.

Prima di spiegare meglio la Proprietà (3) di \mathbb{R} facciamo alcune

OSSERVAZIONI. • anziché $y < x$ scriviamo anche $x > y$, inoltre $x \leq y$ (o $y \geq x$) significa $x < y$ oppure $x = y$.

- Usando l’ordinamento in \mathbb{R} definiamo per $a, b \in \mathbb{R}$ i seguenti insiemi detti *intervalli*:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = \textit{intervallo chiuso},$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = \textit{intervallo aperto},$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} = \textit{intervallo chiuso},$$

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} = \textit{intervallo chiuso},$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} = \textit{intervallo aperto},$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\} = \textit{intervallo aperto}.$$

$$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}.$$

- Valgono le seguenti regole:
 - Se $a \leq b$ e $x \leq y$ allora $a + x \leq b + y$.
 - Se $a \leq b$ e $x > 0$ allora $a \cdot x \leq b \cdot x$.
 - *Attenzione:* Se $a \leq b$ e $x < 0$ allora $a \cdot x \geq b \cdot x$.
 - Se $0 < a \leq b$ allora $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
- Le Proprietà (1) e (2) valgono anche in \mathbb{Q} , cioè anche \mathbb{Q} è un campo ordinato.

Per continuare servono i concetti di

Maggioranti ed Estremo Superiore. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

- Se $s \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq s$ per ogni $a \in A$, allora s si chiama *maggiorante* di A .
- Se $s_0 \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A tale che $s_0 \leq s$ per ogni maggiorante s di A , allora s_0 si chiama *estremo superiore* di A . Notazione: $\sup A := s_0 =$ *maggiorante più piccolo* di A .
- se $s_0 = \sup A \in A$ allora s_0 si chiama anche *massimo* di A . Notazione: $\max A := s_0 =$ elemento più grande di A .

OSSERVAZIONI. Valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$s_0 = \sup A \iff \begin{cases} \bullet a \leq s_0 \quad \forall a \in A \text{ (cioè } s_0 \text{ è un maggiorante)} \\ \bullet \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ tale che } s_0 - \varepsilon < a \\ \text{(cioè } s_0 - \varepsilon \text{ non è più un maggiorante),} \end{cases}$$

$$s_0 = \max A \iff \begin{cases} \bullet a \leq s_0 \quad \forall a \in A \\ \bullet s_0 \in A. \end{cases}$$

ESEMPI. • Se $A = (0, 1]$, allora $\sup A = \max A = 1$.

- Se $A = (0, 1)$, allora $\sup A = 1 \notin A$ e quindi $\max A$ non esiste.

OSSERVAZIONE. • Non tutti gli insiemi hanno maggioranti, per esempio $A = \mathbb{N}$ non ha maggiorante poiché non esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che $n \leq s$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si scrive $\sup A = +\infty$.

- Nell'ipotesi che $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ abbia un maggiorante (e in tal caso ne ha infiniti), allora si dice che A è *superiormente limitato*. Per esempio $A = (0, 1)$ è superiormente limitato poiché $s = 2$ è un maggiorante di A .

Dopo questo intermezzo torniamo alla Proprietà 3, cioè alla completezza di \mathbb{R} .

L'Assioma della Completezza. \mathbb{R} è *completo*, cioè ogni insieme $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ *superiormente limitato ammette estremo superiore*.

In altre termini, se A ha maggioranti, allora esiste sempre il maggiorante più piccolo.

ESEMPI. • $A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ è superiormente limitato. Per esempio, $s = 1,5$ è un maggiorante poiché se x è tale che

$$x > 1,5 \Rightarrow x^2 > (1,5)^2 = 2,25$$

ciò $x \notin A$. Quindi la completezza di \mathbb{R} implica che esiste $s_0 = \sup A$. Ora si può verificare che $s_0^2 = 2$, cioè $s_0 = \sqrt{2}$.

- Sia $A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\} \subset \mathbb{Q}$. Usando la formula del binomio di Newton (cfr. pagina 6) si può verificare che $s = 3$ è un maggiorante di A . Quindi esiste $s_0 = \sup A =: e$.

OSSERVAZIONI. • $e = 2,7182818\dots \notin \mathbb{Q}$ viene chiamato *numero di Nepero*.

- Il secondo esempio dimostra che in \mathbb{Q} la proprietà (3) non vale, cioè \mathbb{Q} non è completo. In parole povere questo significa che la retta razionale ha buchi, per esempio in $\sqrt{2}$ oppure in e .

Analogamente ai concetti di maggiorante ed estremo superiore possiamo introdurre i concetti di

Minoranti ed Estremo Inferiore. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

- (a) Se $r \in \mathbb{R}$ tale che $r \leq a$ per ogni $a \in A$, allora r si chiama *minorante* di A .
 (b) Se $r_0 \in \mathbb{R}$ è un minorante di A tale che $r_0 \geq r$ per ogni minorante r di A , allora r_0 si chiama *estremo inferiore* di A . Notazione: $\inf A := r_0 =$ *minorante più grande* di A .
 (c) se $r_0 = \inf A \in A$ allora r_0 si chiama anche *minimo* di A . Notazione: $\min A := r_0 =$ *elemento più piccolo* di A .

OSSERVAZIONI. Valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$r_0 = \inf A \iff \begin{cases} \bullet r_0 \leq a \ \forall a \in A \text{ (cioè } r_0 \text{ è un minorante),} \\ \bullet \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ tale che } r_0 + \varepsilon > a \\ \text{(cioè } r_0 + \varepsilon \text{ non è più un minorante);} \end{cases}$$

$$r_0 = \min A \iff \begin{cases} \bullet r_0 \leq a \ \forall a \in A, \\ \bullet r_0 \in A. \end{cases}$$

ESEMPLI. • Se $A = [0, 1]$, allora $\inf A = \min A = 0$.

- Se $A = (0, 1]$, allora $\inf A = 0 \notin A$ quindi $\min A$ non esiste.

OSSERVAZIONE. • Non tutti gli insiemi hanno minoranti, per esempio $A = \mathbb{Z}$ non ha minoranti poiché non esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che $r \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. In tal caso si scrive $\inf A = -\infty$.

- Nell'ipotesi che $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ abbia un minorante (e in tal caso ne ha infiniti), allora si dice che A è *inferiormente limitato*. Per esempio $A = (0, +\infty)$ è inferiormente limitato poiché $s = -1$ è un minorante di A .
- Se A è superiormente e anche inferiormente limitato, allora si chiama *limitato*. Per esempio $A = (0, 1] \cup [3, 5)$ è limitato mentre \mathbb{N} non lo è.

Funzioni

DEFINIZIONE 0.1. Se $A, B \neq \emptyset$ sono insiemi, allora una *funzione* f da A a B è una legge (spesso in forma di una formula) che ad ogni $a \in A$ associa un unico $b \in B$. In breve si scrive

$$f : A \rightarrow B, \quad f(a) = b.$$

Inoltre si chiama

- A il *dominio* di f ,
- B il *codominio* di f ,
- $f(A) := \{f(a) : a \in A\}$ l'*immagine* di f ,
- $G(f) := \{(a, f(a)) : a \in A\} \subset A \times B$ il *grafico* di f .

ESEMPIO. Il modulo: Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo il suo *modulo* (oppure *valore assoluto*) come

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per esempio $|3| = 3$, $|-4| = -(-4) = 4$. Quindi $f(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$ definisce una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con immagine $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Il grafico $G(f) \subset \mathbb{R}^2$ è riportato nella Figura 1.

OSSERVAZIONI. Per il modulo valgono le seguenti relazioni importanti:

Se $x, y, l \in \mathbb{R}$, allora

- $|x| \geq 0$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|x| < l \iff -l < x < l \iff x \in (-l, l)$,
- $|-x| = |x|$ e $||x|| = |x|$,
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ e $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$,

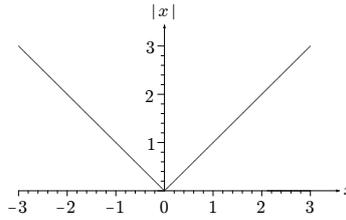


FIGURA 1. Il grafico del modulo.

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*disuguaglianza triangolare*),
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

L'importanza del modulo si basa in particolare sulla seguente

OSSERVAZIONE. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| = \text{distanza tra } x \text{ e } y \text{ sulla retta reale}$$

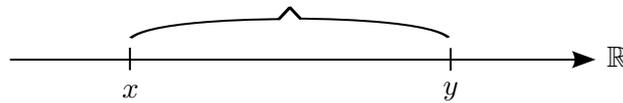


FIGURA 2. Modulo e distanze sulla retta reale

Quindi il modulo ci permette di misurare distanze.

Fattoriale e Coefficienti Binomiali

DEFINIZIONE 0.2. Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo il suo *fattoriale*

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Per esempio $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

- OSSERVAZIONI.**
- $n!$ = numero di permutazioni di n oggetti distinti. Per esempio per tre oggetti a, b, c esistono $3! = 6$ permutazioni: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.
 - Se $n \geq 1$ allora vale $n! = n \cdot (n - 1)!$.

DEFINIZIONE 0.3. Per $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ definiamo il *coefficiente binomiale*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Per esempio $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$.

OSSERVAZIONI. Per $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ vale

- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, cioè i coefficienti binomiali sono sempre numeri naturali.
- $\binom{n}{k}$ = numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ di k elementi. Per esempio l'insieme $\{1, 2, 3, \dots, 89, 90\}$ ha $\binom{90}{6} = 622.614.630$ sottoinsiemi con 6 elementi. Quindi la probabilita di fare 6 al SuperEnalotto giocando una scheda è $\frac{1}{622.614.630} = 0.0000000016061 \dots$
- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}$, per esempio $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$.

OSSERVAZIONI. Per i coefficienti binomiali valgono le seguenti proprietà.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Le prime due regole si possono utilizzare per calcolare coefficienti binomiali con il *triangolo di Tartaglia*. La terza regola stabilisce la simmetria di questo triangolo.

$\binom{n}{k}$	$k = 0$	$= 1$	$= 2$	$= 3$	$= 4$	
$n = 0$	1					
$= 1$	1	1				
$= 2$	1	$\boxed{2}$	$+ \boxed{1}$			per esempio $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$.
$= 3$	1	3	$\boxed{3}$	1		
$= 4$	1	4	6	4	1	

Formula del Binomio di Newton

Introduciamo dapprima il concetto di *sommatoria*: Se per $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ sono dati $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ allora poniamo per la loro somma

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Per esempio $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Per le sommatorie valgono le seguenti regole

- $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{i=m}^n a_i = \dots = \sum_{l=m}^n a_l$.
- $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$.
- $r \cdot \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n r \cdot a_k$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^l a_k + \sum_{k=l+1}^n a_k$ per ogni $m \leq l < n$.
- $\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$.

Se inoltre definiamo $a^0 := 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ allora vale la

PROPOSIZIONE 0.4 (*Formula del Binomio di Newton*). Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, allora

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Per esempio per $n = 4$ troviamo i coefficienti binomiali necessari nella 4. riga del triangolo di Tartaglia e quindi risulta:

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= \mathbf{1} \cdot a^0 b^4 + \mathbf{4} \cdot a^1 b^3 + \mathbf{6} \cdot a^2 b^2 + \mathbf{4} \cdot a^3 b^1 + \mathbf{1} \cdot a^4 b^0 \\ &= b^4 + 4 \cdot ab^3 + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a^3 b + a^4. \end{aligned}$$

Principio di Induzione

Passiamo a un principio che è collegato ai numeri naturali. Dato un numero fisso $n_0 \in \mathbb{N}$ supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ sia data un'affermazione $A(n)$.

PROBLEMA. Verificare che $A(n)$ sia vera per ogni $n \geq n_0$, cioè verificare un numero *infinito* di affermazioni.

ESEMPIO. Per $n \geq 1 =: n_0$ sia $A(n)$ l'affermazione che vale la formula

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Per esempio $A(3)$: $1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2} = 6$ che è vera. Abbiamo quindi dato un numero infinito di formule da verificare e ovviamente non si può procedere verificandole una per una.

Per risolvere questo problema useremo il seguente

TEOREMA 0.5 (*Principio di Induzione*). Se

- (base dell'induzione) $A(n_0)$ è vera, e
- (passo induttivo) $\underbrace{\text{l'ipotesi } A(n) \text{ vera}}_{\text{ipotesi dell'induzione}}$ implica che anche $A(n + 1)$ è vera,

allora $A(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

ESEMPIO. Verifichiamo per induzione che $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ per ogni $n \geq 1$.

- *Base:* Dobbiamo verificare $A(1)$, cioè che vale $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ che è vero.
- *Passo induttivo:* Sotto l'ipotesi che $A(n)$ sia vera per un certo $n \geq n_0$ (non per tutti n , quello infatti è da verificare!) dobbiamo verificare che anche l'affermazione successiva $A(n + 1)$ vale. Allora per ipotesi vale

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

quindi risulta

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + 1) &= \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2} \end{aligned}$$

che è esattamente $A(n + 1)$, cioè la formula che si ottiene sostituendo in $A(n)$ il numero n con $(n + 1)$.

In un certo senso il principio di induzione formalizza l'*effetto domino*: La base fa cadere il primo pezzo mentre il passo induttivo afferma che con un pezzo cade anche sempre quello successivo. Quindi se facciamo cadere il primo pezzo alla fine cadranno tutti i pezzi. Consideriamo altre due esempi.

ESEMPIO (*Disuguaglianza di Bernoulli*). Se $x \geq -1$, allora

$$\boxed{(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.}$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione.

- *Base:* Per $n = 0$ l'affermazione diventa $(1 + x)^0 = 1 + 0 \cdot x$ che è vera.
- *Passo induttivo:* Supponiamo che per un certo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(*) \quad (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Sotto questo ipotesi dobbiamo verificare la disuguaglianza che si ottiene sostituendo n con $n + 1$. Perciò moltiplichiamo $(*)$ con $1 + x \geq 0$

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x) \cdot (1 + x)^n \geq (1 + x) \cdot (1 + n \cdot x) \\ &= 1 + (n + 1) \cdot x + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n + 1) \cdot x \end{aligned}$$

che era da verificare.

□

ESEMPIO (*Progressione Geometrica*). Sia $1 \neq q \in \mathbb{R}$, allora

$$\boxed{\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.}$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione.

- *Base*: Per $n = 0$ l'affermazione diventa $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}$ che è vera.
- *Passo induttivo*: Supponiamo che per un certo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(\#) \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Sotto questa ipotesi dobbiamo verificare la formula che si ottiene sostituendo n con $n + 1$. Perciò sommiamo su entrambi i lati di $(\#)$ la quantità q^{n+1} e otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \end{aligned}$$

che era da verificare. □

ESERCIZIO. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il numero $n + n^2$ è pari.

Concludiamo con la seguente domanda.

Dov'è l'errore? *Tutti i cavalli sono bianchi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A(n)$ l'affermazione "*tutti i cavalli in un insieme di n cavalli hanno lo stesso colore*".

- *Base*: Per $n = 1$ l'affermazione è ovviamente vera.
- *Passo induttivo*: Supponendo che in un insieme di n cavalli tutti hanno sempre lo stesso colore dobbiamo verificare che anche in un insieme di $n + 1$ cavalli tutti hanno lo stesso colore. Allora togliendo dall'insieme di $n + 1$ cavalli un cavallo rimangono n cavalli che per ipotesi hanno lo stesso colore. Rimettiamo il cavallo tolto dall'insieme e togliamo un'altro. Di nuovo rimane un insieme con n cavalli che per ipotesi hanno lo stesso colore. Quindi per transitività tutti i $n + 1$ cavalli hanno lo stesso colore.

Inoltre l'altro ieri ho visto un cavallo bianco in televisione e quindi tutti cavalli sono bianchi. □

Successioni Numeriche

Lo scopo di questo capitolo è di studiare il comportamento di un'espressione dipendente da un parametro naturale n per n sempre più grande, cioè “per n tendente a $+\infty$ ”. Iniziamo con la definizione rigorosa di una successione.

DEFINIZIONE 1.1. Una *successione numerica* è una funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, cioè una regola che fa corrispondere ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un'unico $a(n) \in \mathbb{R}$.

Generalmente si usa la notazione $a_n := a(n)$. Inoltre si rappresenta una successione elencando tutti i valori assunti in ordine crescente oppure attraverso una formula che definisce gli elementi a_n .

ESEMPIO. $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(n) := \frac{1}{n+1}$ definisce una successione che si può rappresentare come

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right) \quad \text{oppure} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Può accadere che una formula che definisce gli elementi a_n di una successione non ha senso per alcuni valori di n , cioè il dominio di a non è tutto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ma soltanto un sottoinsieme della forma $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots\}$. Comunque anche in questo caso si parla di successioni.

ESEMPIO. La formula $a_n := \frac{1}{n \cdot (n-3)}$ definisce una successione $a : \{4, 5, 6, 7, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ (il problema è che qui il denominatore si annulla per $n = 0$ e $n = 3$ e quindi non sono definiti gli elementi a_0 e a_3). In questo caso si scrive

$$(a_n)_{n \geq 4} = \left(\frac{1}{n \cdot (n-3)}\right)_{n \geq 4}$$

Altri esempi di successioni sono

- $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$ (successione dei numeri primi),
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$,
- $(q^n)_{n \in \mathbb{N}} = (q^0, q^1, q^2, q^3, \dots)$ per un $q \in \mathbb{R}$ fisso (*successione geometrica*).

Convergenza, Divergenza e Irregolarità per Successioni

Come già accennato sopra vogliamo studiare il seguente

PROBLEMA. Studiare il comportamento degli elementi a_n di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per n sempre più grande.

Consideriamo alcuni

- ESEMPLI.**
- Per la successione $(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ gli elementi tendono a $l = 0$ se n diventa sempre più grande.
 - Per la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ gli elementi superano qualsiasi valore fissato se n diventa sempre più grande.
 - Per la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots)$ gli elementi oscillano tra i valori -1 e 1 .

Nelle seguenti definizioni formalizziamo questi tre tipi di comportamenti per le successioni.

DEFINIZIONE 1.2 (*Successione convergente*). (i) Si dice che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è *convergente al limite* $l \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|l - a_n| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0.$$

In questo caso si scrive

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l} \quad \text{oppure} \quad \boxed{a_n \rightarrow l \text{ per } n \rightarrow +\infty}$$

(ii) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, allora $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si chiama successione *infinitesima*.

OSSERVAZIONE. Per una successione convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vale che $a_n \rightarrow l$ per $n \rightarrow +\infty$ $\iff l - a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

ESEMPIO. Vogliamo verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Perciò è da verificare che per $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ segue che

$$\left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Quindi, se scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ allora

$$\left|0 - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0,$$

cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, in altre parole $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ è infinitesima.

PROPOSIZIONE 1.3 (*Unicità del limite*). Il limite di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente è unico.

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo¹ supponiamo che esiste una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_2$$

con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_1 \neq l_2$. Allora $\varepsilon := \frac{|l_1 - l_2|}{4} > 0$ e quindi esistono $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|l_1 - a_n| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_1 \quad \text{e} \quad |l_2 - a_n| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_2$$

Usando la disuguaglianza triangolare risulta per $N := \max\{n_1, n_2\}$

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - a_N) + (a_N - l_2)| \leq |l_1 - a_N| + |a_N - l_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}. \end{aligned}$$

Dividendo per $|l_1 - l_2| > 0$ segue $1 < \frac{1}{2}$ \neq . Quindi il limite è unico. \square

ESERCIZIO. Utilizzando la definizione di convergenza verificare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

DEFINIZIONE 1.4 (*Successione divergente*). Si dice che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- *diverge a* $+\infty$, se per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geq n_0$ e in questo caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad a_n \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty;$$

- *diverge a* $-\infty$, se per ogni $M < 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < M$ per ogni $n \geq n_0$ e in questo caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \quad \text{oppure} \quad a_n \rightarrow -\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

- *diverge* se diverge a $+\infty$ oppure $-\infty$.

¹Per i tre principali modi di dimostrazioni cfr. pagina 159.

Per esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette limite finito (cioè se converge) oppure infinito (cioè se diverge), allora si dice *regolare*. Rimane quindi la classe delle successioni che non ammettono limite.

DEFINIZIONE 1.5 (*Successione irregolare*). Se la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è convergente né divergente allora si dice *irregolare* (oppure *oscillante*).

Per esempio la successione $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare. Più in generale consideriamo il seguente

ESEMPIO (*Successione geometrica*). Per $q \in \mathbb{R}$ fisso definiamo $a_n := q^n$. Allora la *successione geometrica* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (i) diverge a $+\infty$ se $q > 1$,
- (ii) è costante (cioè $a_n = a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) se $q = 1$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_0 = 1$,
- (iii) è infinitesima se $|q| < 1$,
- (iv) è irregolare se $q \leq -1$.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo soltanto (i). Per ipotesi $q > 1$ e quindi $q - 1 > 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli segue

$$q^n = (1 + (q - 1))^n \geq 1 + n \cdot (q - 1) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ora per $M > 0$ scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 > \frac{M-1}{q-1}$. Allora risulta che

$$q^n \geq 1 + n \cdot (q - 1) \geq 1 + n_0 \cdot (q - 1) > 1 + \frac{M - 1}{q - 1} \cdot (q - 1) = M \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ per ogni $q > 1$. □

Consideriamo un'altra successione importante.

ESEMPIO (*Successione armonica*). Per $\alpha \in \mathbb{R}$ fisso definiamo $a_n := n^\alpha$. Allora la *successione armonica* $(a_n)_{n \geq 1}$

- (i) diverge a $+\infty$ se $\alpha > 0$,
- (ii) è costante (cioè $a_n = a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) se $\alpha = 0$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_1 = 1$,
- (iii) è infinitesima se $\alpha < 0$,

Il prossimo risultato dà una condizione necessaria per la convergenza di una successione.

PROPOSIZIONE 1.6. *Una successione convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata, cioè esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che*

$$m \leq a_n \leq M \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $l := \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ allora per $\varepsilon = 1$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|l - a_n| < 1$, cioè $l - 1 < a_n < l + 1$, per ogni $n \geq n_0$. Quindi per

$$m := \min\{l - 1, a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \quad \text{e} \quad M := \max\{l + 1, a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\}$$

segue $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata. □

Il contrario della proposizione precedente non vale, cioè una successione limitata non deve essere convergente, basta considerare la successione $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ che è limitata ma non converge.

Cerchiamo ora modi per semplificare lo studio della convergenza di una successione senza dover verificare direttamente la definizione.

Regole per il Calcolo dei Limiti

PROBLEMA. Data una successione “*complicata*” $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, studiare la sua convergenza.

Una soluzione parziale per questo problema fornisce il seguente risultato

PROPOSIZIONE 1.7 (*Regole per il calcolo dei limiti*). Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni convergenti con $a_n \rightarrow l_1$ e $b_n \rightarrow l_2$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora per $n \rightarrow +\infty$

- (i) $a_n \pm b_n \rightarrow l_1 \pm l_2$;
- (ii) $a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$;
- (iii) $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$;
- (iv) $(a_n)^{b_n} \rightarrow l_1^{l_2}$ se $l_1 > 0$;
- (v) $|a_n| \rightarrow |l_1|$.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo solo (ii) cioè che $a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$ per $n \rightarrow +\infty$:

Visto che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, per la proposizione precedente esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre poiché $a_n \rightarrow l_1$ e $b_n \rightarrow l_2$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|l_1 - a_n| < \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \quad \text{e} \quad |l_2 - b_n| < \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \quad \forall n \geq n_0.$$

Quindi con la disuguaglianza triangolare segue

$$\begin{aligned} |l_1 \cdot l_2 - a_n \cdot b_n| &= |(l_1 \cdot l_2 - a_n \cdot l_2) + \overbrace{(a_n \cdot l_2 - a_n \cdot b_n)}^{=0}| \\ &\leq |l_1 \cdot l_2 - a_n \cdot l_2| + |a_n \cdot l_2 - a_n \cdot b_n| \\ &= |l_1 - a_n| \cdot |l_2| + |a_n| \cdot |l_2 - b_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \cdot |l_2| + M \cdot \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \\ &= \varepsilon/2 \cdot \underbrace{\frac{|l_2|}{M + |l_2|}}_{\leq 1} + \varepsilon/2 \cdot \underbrace{\frac{M}{M + |l_2|}}_{\leq 1} \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \end{aligned}$$

cioè $a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$ per $n \rightarrow +\infty$. □

ESEMPI. • Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 - 2n + 3}{-3n^2 + n - 1}.$$

L'espressione rappresenta il rapporto di due successioni ma scritto così non si può ancora utilizzare la regola per $\frac{a_n}{b_n}$ poiché sia il numeratore sia il denominatore divergono. Comunque basta mettere in evidenza nel numeratore e nel denominatore la quantità che cresce più rapidamente, in questo caso n^2 . Utilizzando le regole per somma, differenza, prodotto e rapporto otteniamo

$$\frac{7n^2 - 2n + 3}{-3n^2 + n - 1} = \frac{n^2 \cdot \overbrace{\left(7 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}^{\rightarrow 7 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = 7}}{n^2 \cdot \underbrace{\left(-3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}_{\rightarrow -3 + 0 - 0^2 = -3}} \rightarrow -\frac{7}{3}$$

• Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n}.$$

Non si può applicare direttamente la regola per le differenze poiché i due termini *divergono* entrambi. Per procedere si sfrutta la formula $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+3} - \sqrt{n} &= (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Qui l'ultimo passaggio viene giustificato dalla seguente

OSSERVAZIONE. Le regole per il calcolo dei limiti si possono estendere alle successioni regolari se al limite si ottiene una delle seguenti *forme determinate*: Per ogni $a \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\begin{aligned} \pm\infty + a &:= \pm\infty & \pm\infty \cdot a &:= \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a > 0 \\ \mp\infty & \text{se } a < 0 \end{cases} & \frac{a}{\pm\infty} &:= 0 \\ (\pm\infty) + (\pm\infty) &:= \pm\infty & (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) &:= +\infty & (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) &:= -\infty \\ q^{+\infty} &:= \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < q < 1 \end{cases} & q^{-\infty} &:= \begin{cases} 0 & \text{se } q > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < q < 1 \end{cases} & q^0 &:= 1 \text{ se } q > 0 \end{aligned}$$

Per esempio, se $a_n \rightarrow -3$ e $b_n \rightarrow +\infty$ allora $a_n \cdot b_n \rightarrow -3 \cdot (+\infty) = -\infty$ oppure $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{-3}{+\infty} = 0$.

OSSERVAZIONE. La forma determinata $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ si può generalizzare: Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitata, cioè esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ per ogni successione divergente $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $a_n \cdot c_n \rightarrow 0$ per ogni successione infinitesima $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Quindi possiamo definire altre 2 forme determinate

$$\frac{\text{“limitata”}}{\pm\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \text{“limitata”} \cdot 0 = 0.$$

Esempi concreti sono dati da

$$\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \cos(n^2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0.$$

in quanto $-1 \leq \sin(x), \cos(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

OSSERVAZIONE. Con le forme determinate abbiamo esteso le operazioni algebriche in alcuni casi per gli elementi dei *numeri reali estesi*

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Non si possono però definire tutte le operazioni tra elementi in $\overline{\mathbb{R}}$, per esempio le seguenti operazioni rappresentano *forme indeterminate*:

$$\begin{aligned} (\pm\infty) - (\pm\infty) & & 0 \cdot (\pm\infty) & & \frac{0}{0} \\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} & & \frac{a}{0} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R} & & 1^{\pm\infty} \\ (\pm\infty)^0 & & 0^0 & & \end{aligned}$$

Quindi se per la composizione di due successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al limite otteniamo una forma indeterminata, allora non si può dire nulla sul comportamento della composizione avendo soltanto informazioni sulla convergenza o divergenza di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ESEMPIO. Verifichiamo che $(+\infty) - (+\infty)$ è indeterminata, cioè sapendo soltanto che $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ non si può dire nulla sul comportamento di $a_n - b_n$ per $n \rightarrow +\infty$. Basta considerare $b_n := n$ e

- $a_n := n \Rightarrow a_n - b_n = 0 \rightarrow 0$, cioè la differenza converge;

- $a_n := n^2 \Rightarrow a_n - b_n = n^2 - n = n^2(1 - \frac{1}{n}) \rightarrow +\infty \cdot 1 = +\infty$, cioè la differenza diverge;
- $a_n := n + (-1)^n \Rightarrow a_n - b_n = (-1)^n$, cioè la differenza è irregolare.

Le regole per il calcolo dei limiti manifestano che il concetto di limite è compatibile con le operazioni algebriche.

ESERCIZIO. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - \frac{2}{n}} \right).$$

(Risultato $l = \frac{\sqrt{5}}{5}$).

Continuiamo studiando il comportamento tra

Limiti e Ordinamento

TEOREMA. Se $a_n \rightarrow l_1$ e $b_n \rightarrow l_2$ per $n \rightarrow +\infty$ con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

- $l_1 \leq l_2$ (Teorema del Confronto);
- se inoltre $a_n \leq c_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $l_1 = l_2$, allora anche $c_n \rightarrow l_1$ per $n \rightarrow +\infty$ (Teorema dei Carabinieri).

In particolare il Teorema dei Carabinieri è molto utile per studiare successioni complicate $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ incastrandole tra 2 successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ più semplici (cioè tra i due carabinieri).

ESEMPLI. • Vogliamo studiare la convergenza della successione $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con

$$c_n := \left(\frac{1}{3 + \cos(n^2)} \right)^n.$$

Allora, $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1 \Rightarrow 2 = 3 - 1 \leq 3 + \cos(n^2) \leq 3 + 1 = 4$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{4} \right)^n}_{=: a_n \rightarrow 0} \leq \left(\frac{1}{3 + \cos(n^2)} \right)^n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right)^n}_{=: b_n \rightarrow 0} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

e di conseguenza $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

- Verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a > 0.$$

Consideriamo prima il caso $a > 1$ e poniamo $d_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ cioè $\sqrt[n]{a} = 1 + d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la disuguaglianza di Bernoulli segue

$$\underbrace{(1 + d_n)^n}_{=a} \geq 1 + n \cdot d_n \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{a - 1}{n}}_{\rightarrow 0} \geq d_n \geq \underbrace{0}_{\rightarrow 0} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Di conseguenza $d_n \rightarrow 0$ e quindi $\sqrt[n]{a} = 1 + d_n \rightarrow 1 + 0 = 1$ per $n \rightarrow +\infty$. Se $0 < a < 1$ poniamo $\tilde{a} := \frac{1}{a} > 1$. Da sopra segue quindi

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\tilde{a}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

OSSERVAZIONE. Il concetto di limite per una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è collegato al comportamento degli elementi a_n per n sempre più grande. Quindi i primi elementi non influiscono sulla esistenza oppure sul valore del limite. Nel seguito diremo che una proprietà per una successione vale *definitivamente*, se esiste un n_0 tale che tale proprietà vale per $n > n_0$. Per esempio la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n - 1000)_{n \in \mathbb{N}}$ è positiva definitivamente poiché $a_n > 0$ per ogni $n > 1000 =: n_0$. Invece $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è positiva definitivamente.

OSSERVAZIONI. • Dal teorema del confronto segue che per una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente al limite l e con $a_n \in [\alpha, \beta]$ definitivamente vale $l \in [\alpha, \beta]$. In particolare segue il *Teorema della permanenza del segno*: Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è positiva definitivamente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ allora $l \geq 0$.

- Non vale l'osservazione precedente per intervalli aperti oppure disuguaglianze strette. Per esempio, se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ allora **NON** segue $l > 0$!!
Come controesempio basta considerare

$$a_n := \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0 \forall n \in \mathbb{N}} \rightarrow \underbrace{0}_{\neq 0} = l \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

- Abbiamo detto che $\frac{a}{0}$ anche per $a \neq 0$ è una forma indeterminata. Tuttavia si potrebbe pensare che sia invece determinata con il valore ∞ . Il problema è che non si può decidere il segno dell'infinito. Si possono seguire 2 strade:
 - Si introduce un terzo infinito ∞ senza segno e si pone $\frac{a}{0} := \infty$ per ogni $a \neq 0$, oppure
 - si considerano soltanto gli infiniti $-\infty$ e $+\infty$ (come faremo nel seguito) e di conseguenza $\frac{a}{0}$ diventa una forma indeterminata come si vede dal seguente esempio: $a_n := \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ ma $\frac{1}{a_n} = (-1)^n \cdot n$ è oscillante.

Il problema posto nell'ultima osservazione si può risolvere parzialmente introducendo *infinitesimi* con segno.

DEFINIZIONE 1.8. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione infinitesima, cioè $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Se

- $a_n \geq 0$ definitivamente, allora scriviamo $a_n \rightarrow 0^+$ (oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0^+$),
- $a_n \leq 0$ definitivamente, allora scriviamo $a_n \rightarrow 0^-$ (oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0^-$).

Così otteniamo altre due forme determinate

$$\frac{a}{0^\pm} := \pm\infty \quad \text{se } a > 0, \quad \frac{a}{0^\pm} := \mp\infty \quad \text{se } a < 0.$$

Inoltre abbiamo

$$\frac{a}{\pm\infty} := 0^\pm \quad \text{se } a > 0, \quad \frac{a}{\pm\infty} := 0^\mp \quad \text{se } a < 0.$$

Con queste definizioni le regole per il calcolo dei limiti restano validi. Per esempio

- $a_n \rightarrow 2, b_n \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{2}{0^-} = -\infty$,
- $a_n \rightarrow -1, b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{-1}{+\infty} = 0^-$.

PROBLEMA. Per studiare la convergenza di una successione abbiamo finora avuto bisogno di avere almeno un *candidato* per il suo limite.

Per esempio, come vedremo tra poco la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ converge ma ciò non si può dimostrare usando la definizione oppure le regole per il calcolo dei limiti.

Per risolvere questo problema cerchiamo quindi criteri che implicano la convergenza senza fare riferimento al limite. Prima ci serve una

DEFINIZIONE 1.9. Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice

- *crescente*, se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- *decrescente*, se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- *monotona*, se è crescente oppure decrescente.

Il seguente risultato è molto importante.

TEOREMA 1.10 (*Regolarità delle successione monotone*). Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona, allora ammette limite. Questo limite è finito, cioè $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, se e solo se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata. Inoltre vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{se } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è crescente,} \\ \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{se } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo soltanto che una successione crescente e limitata converge. Per la completezza di \mathbb{R} esiste $l := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Sia $\varepsilon > 0$. Allora usando la caratterizzazione dell'estremo superiore segue che

$$\begin{aligned} a_n \leq l &\iff 0 \leq l - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \\ \exists a_{n_0} \text{ tale che } l - \varepsilon < a_{n_0} &\iff l - a_{n_0} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Usando inoltre la crescita di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ otteniamo

$$0 \leq l - a_n \leq l - a_{n_0} < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_0$$

e quindi $|l - a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$. \square

Per dimostrare l'importanza di questo risultato consideriamo due applicazioni. Inoltre sarà utilizzato per dimostrare il "Teorema degli Zeri", cfr. pagina 41.

Il Metodo di Erone. Per $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$ definiamo la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ come

$$\begin{aligned} x_0 &:= 1, \\ x_{n+1} &:= \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right). \end{aligned}$$

In questo caso non è data una formula per calcolare direttamente x_n per un valore $n \in \mathbb{N}$, ma una regola per calcolare il termine successivo x_{n+1} della successione conoscendo quello precedente x_n . Questo modo di definire una successione si dice *per ricorrenza* ed è legata al principio di induzione. Nel seguente grafico è riportato come viene costruito x_{n+1} da x_n :

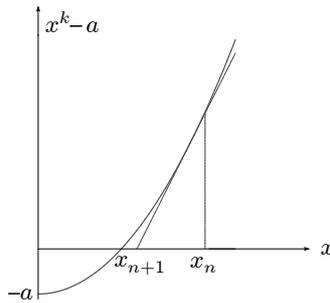


FIGURA 3. Il metodo di Erone.

si traccia in $x = x_n$ la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^k - a$ che poi interseca l'asse- x in x_{n+1} (come verificheremo a pagina 50). In particolare si vede che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è

- definitivamente decrescente (per $n \geq 1$), e
- limitata ($x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

Quindi per il teorema precedente il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n =: r \in [0, +\infty)$$

converge. Per calcolare r notiamo che anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = r$ e poi usiamo le regole per il calcolo dei limiti: Per $n \rightarrow +\infty$ vale

$$r \leftarrow x_{n+1} = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1) \underbrace{x_n}_{\rightarrow r} + \frac{a}{\underbrace{x_n^{k-1}}_{\rightarrow r^{k-1}}} \right) \rightarrow \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)r + \frac{a}{r^{k-1}} \right),$$

quindi

$$r = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)r + \frac{a}{r^{k-1}} \right) \quad \Rightarrow \quad r^k = a,$$

cioè abbiamo “costruito”

$$r =: \sqrt[k]{a} = \text{radice } k\text{-esima di } a.$$

Interesse Composto e il Numero “ e ” di Nepero. Se un capitale di €1 viene investito a 100% di interesse annuale, allora dopo un anno il capitale è di

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

se l'interesse viene pagato ogni n -esimo dell'anno. Quindi ci si può chiedere che cosa succede se gli interessi vengono pagati dopo periodi sempre più brevi: per esempio dopo

- ogni mese: $n = 12 \Rightarrow a_{12} = 2,61303529\dots$,
- ogni giorno: $n = 365 \Rightarrow a_{365} = 2,71456748\dots$,
- ogni ora: $n = 8760 \Rightarrow a_{8760} = 2,71812669\dots$,
- ogni secondo: $n = 31536000 \Rightarrow a_{31536000} = 2,71828178\dots$

etc. Visto che per n crescente si accumulano sempre più interessi composti, la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente. Quindi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è

- crescente, e
- limitata in quanto $a_n \in [2, 3]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (usare la formula del binomio di Newton).

Quindi per il teorema precedente sulla convergenza delle successioni monotone $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e si pone

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \text{numero di Nepero.}$$

Per il teorema del confronto vale $e \in [2, 3]$. Si può verificare che $e \notin \mathbb{Q}$ e

$$e = 2,718281828459045\dots$$

Confronto tra Successioni

DEFINIZIONE 1.11. Se per due successioni si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora si dice che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono *asintotiche* e si scrive $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$.

OSSERVAZIONI. • Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$, allora $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hanno lo stesso comportamento asintotico, cioè

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\iff (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e in tal caso $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$;
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge $\iff (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge e in tal caso $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$;
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare $\iff (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare.
- “ \sim ” è una *relazione di equivalenza* sull'insieme delle successioni, cioè
 - $a_n \sim a_n$ per $n \rightarrow +\infty$ (riflessività),
 - $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$ per $n \rightarrow +\infty$ (simmetria),
 - $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$ per $n \rightarrow +\infty$ (transitività).

Il seguente principio è spesso utile per semplificare il calcolo dei limiti.

TEOREMA 1.12 (*Principio di Sostituzione*). Se $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$ e $c_n \sim c'_n$ per $n \rightarrow +\infty$, allora

$$\frac{a_n \cdot b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

In particolare $a_n \cdot b_n \sim a'_n \cdot b'_n$ e $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a'_n}{b'_n}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Quindi in *prodotti e rapporti* si possono sostituire successioni con altre successioni asintotiche senza cambiare il comportamento asintotico, in particolare senza cambiare il limite se esiste.

ESEMPI. • $2n^3 - 5n^2 - 3n + 11 \sim 2n^3$ per $n \rightarrow +\infty$ poiché

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{2n^3} = 1 - \frac{5}{2n} - \frac{3}{2n^2} + \frac{11}{2n^3} \rightarrow 1 - 0 - 0 + 0 = 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

• $n + 5 \sim n$ poiché $\frac{n+5}{n} = 1 + \frac{5}{n} \rightarrow 1$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi per il principio di sostituzione segue che $(n+5)^3 \sim n^3$ e

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{(n+5)^3} \sim \frac{2n^3}{n^3} = 2 \rightarrow 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{(n+5)^3}.$$

È doveroso fare la seguente

OSSERVAZIONE. Il principio di sostituzione **!!! NON !!!** vale per somme, differenze

o potenze, cioè se $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$ allora

- $\not\sim a_n + b_n \sim a'_n + b'_n$ per $n \rightarrow +\infty$,
- $\not\sim a_n - b_n \sim a'_n - b'_n$ per $n \rightarrow +\infty$,
- $\not\sim (a_n)^{b_n} \sim (a'_n)^{b'_n}$ per $n \rightarrow +\infty$,

CONTROESEMPI. • (per la somma) $a_n := n + 1 \sim n =: a'_n$ e $b_n := -n \sim -n =: b'_n$ ma $a_n + b_n = (n+1) - n = 1$ e $a'_n + b'_n = n - n = 0$ non sono asintotiche in quanto ammettono limiti diversi.

• (per la potenza) $a_n := 1 + \frac{1}{n} \sim 1 =: a'_n$ e $b_n := n \sim n =: b'_n$ ma $(a_n)^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $(a'_n)^{b'_n} = 1^n = 1$ non sono asintotiche sempre poiché ammettono limiti diversi.

Concludiamo questo capitolo con un criterio che è utile per studiare limiti che coinvolgono radici n -esime.

PROPOSIZIONE 1.13. Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$ esiste, allora segue che anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

ESEMPIO. Sia $a_n = n$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

ESERCIZIO. Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. (Suggerimento: $n = \sqrt[n]{n^n}$)

CAPITOLO 2

Serie numeriche

Consideriamo il seguente

PROBLEMA. Sommare tutti gli elementi di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cioè dare senso alla somma *infinita*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

L'idea per risolvere questo problema è di considerare prima le *somme parziali* (oppure *ridotte*) n -esime

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

e poi mandare $n \rightarrow +\infty$.

Convergenza e prime Proprietà

DEFINIZIONE 2.1. Diremo che la *serie numerica* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- *converge* alla *somma* $s \in \mathbb{R}$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ e in questo caso scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s$;
- *diverge* a $\pm\infty$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \pm\infty$ e in questo caso scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \pm\infty$;
- è *irregolare* (oppure *oscillante*), se $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare.

Quindi studiare una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ significa studiare la successione delle somme parziali $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ESEMPI. • *Serie geometrica.* Se $q \in \mathbb{R}$ allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{è irregolare} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. 1° caso $q = 1$: Se $q = 1$ allora $q^k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$s_n = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n = n + 1 \rightarrow \infty.$$

2° caso $q \neq 1$: In questo caso le somme parziali valgono (cfr. pagina 8)

$$s_n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q}{1 - q} \cdot q^n.$$

La tesi ora segue dal comportamento della successione geometrica, cfr. pagina 11 \square

- *Serie armonica.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty.$$

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty. \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE. Useremo la divergenza della serie armonica per dimostrare che (teoricamente) si può costruire una scala autoportante che superare qualsiasi distanza. Perciò consideriamo gradini della lunghezza $l = 2$ e del peso 1 che sistemiamo uno sul altro (senza usare colle o fissaggi) in maniera di superare una distanza massima. Usando solo 2 gradini è molto semplice: dobbiamo sistemare il gradino sotto tale che lo spigolo capita esattamente sotto il (bari)centro del gradino sopra:

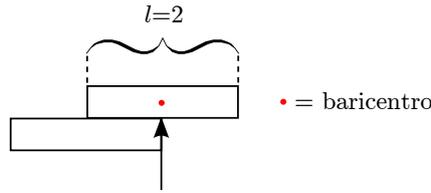


FIGURA 4. Scala autoportante: 2 gradini.

Continuiamo e sistemiamo un terzo gradino *sotto* i primi due:¹ Se x indica lo sbalzo del secondo al terzo gradino, dalla legge della leva (cfr. Figura 5) segue

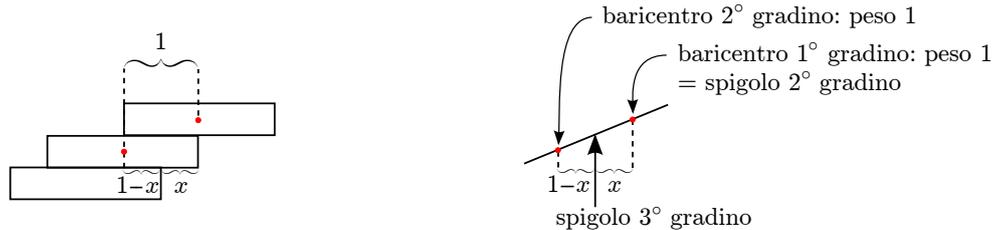


FIGURA 5. Scala autoportante: 3 gradini.

$$1 \cdot (1 - x) = 1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Continuando in questa maniera arriviamo al punto in cui dobbiamo sistemare il $(n + 1)$ -esimo gradino *sotto* quelli n precedenti. Come prima dobbiamo piazzare il gradino sottostante in maniera che lo spigolo capita esattamente sotto il baricentro del corpo fatto dai $n = (n - 1) + 1$ gradini sovrastanti. Visto che

- lo spigolo del n -esimo gradino capita esattamente sotto il baricentro del corpo fatto dai primi $(n - 1)$ gradini (e quindi dal peso $n - 1$) e
- la distanza tra lo spigolo del n -esimo gradino e il suo baricentro è 1 sempre per la legge della leva segue (cfr. Figura 6)

¹sopra non si può aggiungere niente senza che crollasse tutto!

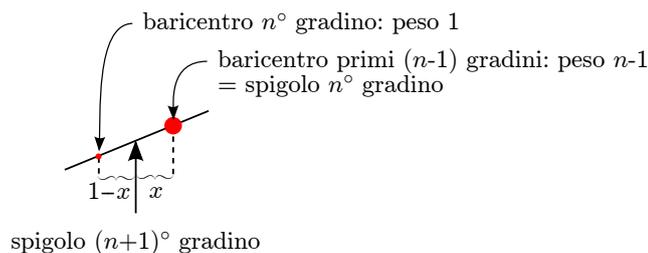


FIGURA 6. Scala autoportante: $n + 1$ gradini.

$$1 \cdot (1 - x) = (n - 1) \cdot x \Rightarrow x = \frac{1}{n}.$$

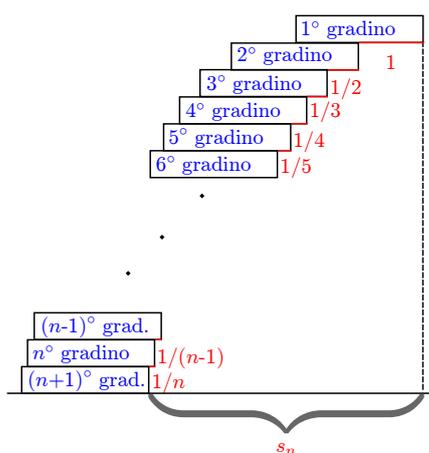


FIGURA 7. Scala autoportante che supera (teoricamente) qualsiasi distanza.

Così con $n + 1$ gradini abbiamo costruita una scala autoportante che supera la distanza

$$s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Comunque, con 10.000 gradini di lunghezza $l = 2m$ in questa maniera si superano appena 9,21m e per superare 10m servono addirittura 22028 gradini!

- Serie di *Mengoli*.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione si può dimostrare (Esercizio!)² che

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

□

Solo in casi rari è possibile trovare una formula esplicita semplice per le somme parziali di una serie. Di conseguenza si pone il seguente

²In alternativa si può usare il seguente trucco:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{\overbrace{(k+1) - k}^{=1}}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{= \text{somma telescopica}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

PROBLEMA. Come si può studiare la convergenza di una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ senza conoscere una formula semplice per le somme parziali s_n ?

Evidenziamo che così non chiediamo più di calcolare la somma della serie ma soltanto di verificare che la somma esiste e sia finita. Iniziamo con la seguente

PROPOSIZIONE 2.2 (Condizione necessaria). Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $s := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, cioè $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = s$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. Così risulta

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ &= a_n \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad \square$$

Evidentemente questa condizione è soltanto necessaria ma *non* sufficiente per la convergenza come si vede dalla serie armonica. Come vedremo nel seguente paragrafo l'ordine in \mathbb{R} ci aiuta a risolvere il problema posto sopra.

Serie a Termini Positivi

Se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ cioè $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente. Quindi possiamo usare il teorema sulla regolarità delle successioni monotone (cfr. pagina 16) per studiare il comportamento della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. In questa maniera otteniamo

TEOREMA 2.3. Se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (basta anche $a_k \geq 0$ definitivamente), allora

$$\text{la serie } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se e solo se } (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è limitata,} \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se e solo se } (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ non è limitata.} \end{cases}$$

Quindi per una serie a termini positivi basta verificare la limitatezza della successione delle somme parziali per ottenere convergenza. Inoltre risulta che una serie a termini positivi non può essere irregolare.

ESEMPIO. Consideriamo la serie a termini positivi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \text{serie esponenziale}$$

Per verificare la convergenza osserviamo che per $k \geq 2$ vale

$$k! = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}_{\geq 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{k-1}} \geq 2^{k-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Questa relazione vale però anche per $k = 0$ e $k = 1$ e quindi risulta che

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 2 \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e di conseguenza $s := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ converge. Inoltre dal teorema del confronto segue che $s \leq 4$.

OSSERVAZIONE. In seguito dimostreremo che $s = e$, cioè

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.}$$

Nell'esempio precedente per dimostrare la convergenza della serie esponenziale l'abbiamo confrontata con la serie geometrica con $q = \frac{1}{2}$. Nel seguente risultato generalizziamo questa idea e consideriamo 2 serie qualsiasi.

PROPOSIZIONE 2.4 (*Criterio del confronto*). Sia $0 \leq a_k \leq b_k$ definitivamente. Allora

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k}_{\text{maggiorante}} \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k}_{\text{minorante}} \text{ converge}$$

oppure

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k}_{\text{minorante}} \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k}_{\text{maggiorante}} \text{ diverge}$$

ESEMPIO. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Visto che $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ per ogni $k \geq 1$ segue dalla divergenza della serie armonica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ la divergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Del criterio precedente esiste anche una versione asintotica.

PROPOSIZIONE 2.5 (*Criterio del confronto, versione asintotica*). Sia $a_k \geq 0$ e $b_k > 0$ definitivamente tali che esista

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} =: l \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge}$$

oppure

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ diverge}$$

Se inoltre $l \neq 0$ (in particolare se $a_k \sim b_k$ per $k \rightarrow +\infty$), allora valgono anche le implicazioni opposte, cioè

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge}$$

oppure

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ diverge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ diverge}$$

ESEMPIO. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Per studiare la convergenza confrontiamola con

la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$. Allora

$$\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k \cdot (k+1)}} = \frac{k \cdot (k+1)}{k^2} = 1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1 = l \neq 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Quindi, visto che la serie di Mengoli converge, converge anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

OSSERVAZIONE. Usando metodi più sofisticati si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

PROBLEMA. Data una serie, trovare una serie minorante divergente oppure una serie maggiorante convergente per applicare il Criterio del Confronto.

Una possibilità per affrontare questo problema è di usare come seconda serie la serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ per $q > 0$. Sfruttando questa idea si possono dimostrare i seguenti due criteri.

PROPOSIZIONE 2.6 (Criterio del Radice). Sia $a_k \geq 0$ definitivamente. Se esiste $q := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k}$, allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- converge se $q < 1$,
- diverge se $q > 1$,
- non si può concludere nulla sul comportamento della serie se $q = 1$.

ESEMPIO. Sia $a_k := \frac{a^k}{k^k}$ per $a > 0$ fisso. Allora

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{a}{k} \rightarrow 0 = q < 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

PROPOSIZIONE 2.7 (Criterio della Rapporto). Sia $a_k > 0$ definitivamente. Se esiste $q := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- converge se $q < 1$,
- diverge se $q > 1$,
- non si può concludere nulla sul comportamento della serie se $q = 1$.

ESEMPIO (Serie Esponenziale). Sia $a_k := \frac{a^k}{k!}$ per $a > 0$ fisso. Allora

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^k}{k!}} = \frac{a^{k+1} \cdot k!}{\underbrace{(k+1)! \cdot a^k}_{=k! \cdot (k+1)}} = \frac{a}{k+1} \rightarrow 0 = q < 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ converge.

Concludiamo questa sezione con un importante

ESEMPIO (Serie Armonica Generalizzata). Sia $a_k := \frac{1}{k^\alpha}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ fisso. Allora sappiamo per il criterio del confronto che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- diverge per $\alpha = 1 \Rightarrow$ diverge per ogni $\alpha \leq 1$,
- converge per $\alpha = 2 \Rightarrow$ converge per ogni $\alpha \geq 2$

dove le implicazioni seguono dal criterio del confronto:

$$\begin{aligned} \alpha \leq 1 & \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha} & \text{cioè } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} & \text{è un minorante divergente,} \\ \alpha \geq 2 & \Rightarrow \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^\alpha} & \text{cioè } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} & \text{è un maggiorante convergente} \end{aligned}$$

della serie armonica generalizzata.

Mancano però i parametri $\alpha \in (1, 2)$. Quindi si pone la domanda come si comporta la serie armonica generalizzata per questi parametri. Come vedremo in seguito (cfr. pagina 114) vale la seguente.

PROPOSIZIONE 2.8.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

OSSERVAZIONE. La serie armonica generalizzata è legata all'[ipotesi di Riemann](#), considerata il più importante problema aperto della matematica.

Serie a Termini di Segno Variabili

Abbiamo visto che la serie armonica diverge:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty.$$

Cioè facendo un numero sufficientemente grande di passi di lunghezza $\frac{1}{k}$ in avanti si supera qualsiasi limite.

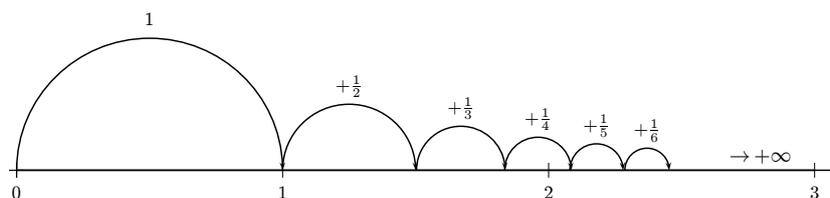


FIGURA 8. Divergenza della serie armonica

PROBLEMA. Che cosa succede se dopo ogni passo invertiamo direzione o, in termini matematici, se i termini cambiano segno? Cioè come si comporta la *Serie di Leibniz*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \pm \dots ?$$

Per ottenere una idea tracciamo un grafico simile a quello precedente:

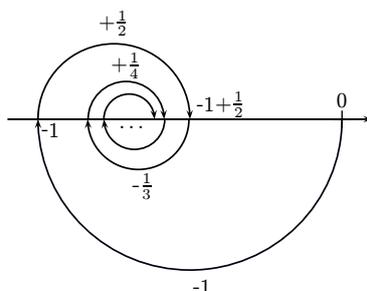


FIGURA 9. Convergenza della serie di Leibniz.

Dalla Figura 9 si può avere l'impressione che la serie converge. Ciò è infatti vero per la

PROPOSIZIONE 2.9 (*Criterio di Leibniz*). Se la successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è

- decrescente, e
- infinitesima

allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k =: s \in \mathbb{R}$ converge. Inoltre vale $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cfr. Figura 10.



FIGURA 10. Criterio di Leibniz: Stima dell'errore.

OSSERVAZIONE. Si può verificare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -\ln(2)$$

ESEMPIO. Sia $a_k := \frac{1}{k^\alpha}$ per $\alpha > 0$. Allora $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è decrescente e infinitesima e quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{converge per ogni } \alpha > 0.$$

Confrontando la serie armonica con la serie di Leibniz ricaviamo un'importante

OSSERVAZIONE. Se

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge}}_{\text{convergenza (semplice)}} \quad \not\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ converge}}_{\text{convergenza assoluta}}$$

Infatti per $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$ la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge mentre

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge.}$$

Invece vale il contrario:

PROPOSIZIONE 2.10. Se $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ converge, allora converge anche $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, cioè la convergenza assoluta implica la convergenza semplice.

Questa proposizione è molto utile in quanto la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ è sempre a termini positivi e quindi può essere studiata con i criteri per tale serie. Per esempio, applicando il criterio del rapporto e della radice a $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ otteniamo la seguente

PROPOSIZIONE 2.11. Se

$$q := \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \text{oppure} \quad q := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

ESEMPIO (*Serie Esponenziale*). Sia $a_k := \frac{a^k}{k!}$ per $a \in \mathbb{R}$ fisso. Allora

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|a|^k}{k!}} = \frac{|a|}{k+1} \rightarrow 0 = q < 1$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

OSSERVAZIONE. In seguito (vedi pagina 79) dimostreremo che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo con un'osservazione abbastanza sorprendente.

OSSERVAZIONE. Mentre per una somma finita l'ordine degli addendi non influisce al risultato, p.e.

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4 + 1 + 3 + 2 = 3 + 1 + 2 + 4 = \dots$$

ciò in generale *non* vale per le serie, cioè per somme *infinite*.

Per esempio si può verificare che per qualsiasi $s \in \mathbb{R}$ esiste un "riordinamento" della serie di Leibniz $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$, cioè un'ordine per sommare gli elementi della successione $((-1)^k \frac{1}{k})_{k \geq 1}$, che converge esattamente alla somma s . In altre parole, sommando gli elementi $(-1)^k \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ nell'ordine giusto si può avere qualsiasi somma. In questo senso una somma infinita non è più commutativa, cioè indipendente dall'ordine degli addendi.

Questo fenomeno, però, si verifica solo per le serie che convergono ma non convergono assolutamente come per esempio la serie di Leibniz. Per una serie che converge assolutamente invece ogni riordinamento converge alla stessa somma.

Funzioni Reali di una Variabile Reale

DEFINIZIONE 3.1. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ si dice *funzione reale di una variabile reale*.

In questo caso il grafico

$$G(f) = \left\{ (x, f(x)) : x \in X \right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

cioè si può disegnare nel piano xy .

ESEMPIO. Definiamo $A(r) :=$ area di un cerchio di raggio $r \geq 0$. Questa regola definisce una funzione $A : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con immagine $A([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Inoltre $A(r) = \pi r^2$ e quindi il grafico $G(A) \subset \mathbb{R}^2$ è dato da (parte di) una parabola:

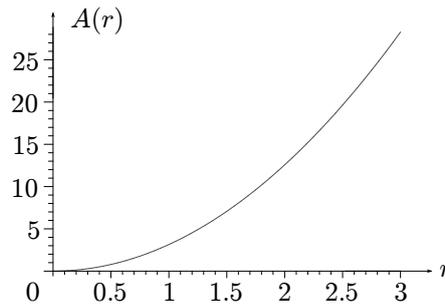


FIGURA 11. Grafico di $A(r)$.

Operazioni e Composizione tra Funzioni

Somma, Differenza, Prodotto e Frazioni di Funzioni. Le operazioni algebriche si possono facilmente estendere dai numeri alle funzioni.

Se $f : X_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni allora definiamo per $X := X_1 \cap X_2$

- la *somma* $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ per $x \in X$;
- la *differenza* $f - g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ per $x \in X$;
- il *prodotto* $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ per $x \in X$;
- la *frazione* $\frac{f}{g} : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ per $x \in X_0 := \{z \in X : g(z) \neq 0\}$;

Un altro modo per costruire una nuova funzione da due funzioni date è la

Composizione di funzioni. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ allora la funzione

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in X$$

si dice *funzione composta di f e g*.

ESEMPIO. Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sin(x)$ allora $(g \circ f)(x) = \sin|x|$. In questo esempio possiamo anche considerare $f \circ g$ per il quale si ottiene $(f \circ g)(x) = |\sin(x)|$. Quindi in generale $f \circ g \neq g \circ f$.

Proprietà di Funzioni Reali

Elenchiamo in seguito alcune proprietà importanti di funzioni reali.

Funzioni Invertibili.

DEFINIZIONE 3.2. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice

- *iniettiva*, se per ogni $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste *al più* un $x \in X$ con $f(x) = y$;
- *suriettiva* se per ogni $y \in Y$ esiste *almeno* un $x \in X$ con $f(x) = y$;
- *biettiva* se f è iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste *un unico* $x \in X$ con $f(x) = y$.

ESEMPIO. Consideriamo la funzione $f_k : X_k \rightarrow Y_k$, $f_k(x) := x^2$ per diverse scelte di $X_k, Y_k \subseteq \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, 3, 4$):

(a) $X_1 = \mathbb{R}$, $Y_1 = \mathbb{R}$. In questo caso

- per $0 < y \in Y_1$ esistono due $x_1, x_2 \in X_1$, $x_1 = -\sqrt{y} \neq x_2 = +\sqrt{y}$ con $(x_1)^2 = (x_2)^2 = y$ e quindi f_1 non è iniettiva;
- per $y < 0$ non esiste $x \in X_1$ tale che $f_1(x) = x^2 = y$ e quindi f_1 non è suriettiva.

Riassumendo f_1 non è né iniettiva né suriettiva.

(b) $X_2 = \mathbb{R}$, $Y_2 = [0, +\infty)$. In questo caso

- per $0 < y \in Y_2$ esistono due $x_1, x_2 \in X_2$, $x_1 = -\sqrt{y} \neq x_2 = +\sqrt{y}$ con $(x_1)^2 = (x_2)^2 = y$ e quindi f_2 non è iniettiva;
- per $y \in Y_2$ definiamo $x := +\sqrt{y} \in X_2$ che implica $f_2(x) = x^2 = y$ e quindi f_2 è suriettiva.

Riassumendo f_2 non è iniettiva ma è suriettiva.

(c) $X_3 = [0, +\infty)$, $Y_3 = \mathbb{R}$. In questo caso per $0 \leq y \in Y_3$ $x := +\sqrt{y}$ è l'unico $x \in X_3$ con $x^2 = y$ mentre per $0 > y \in Y_3$ non esiste $x \in X_3$ tale che $f_3(x) = x^2 = y$. Quindi

- f_3 è iniettiva;
- f_3 non è suriettiva.

Riassumendo f_3 è iniettiva ma non è suriettiva.

(d) $X_4 = [0, +\infty)$, $Y_4 = [0, +\infty)$. In questo caso per ogni $y \in Y_4$ $x := +\sqrt{y}$ è l'unico $x \in X_4$ con $x^2 = y$. Quindi

- f_4 è iniettiva;
- f_4 è suriettiva.

Riassumendo f_4 è biettiva.

OSSERVAZIONI. • Al livello del grafico $G(f)$ per una funzione reale $f : X \rightarrow Y$ vale:

- f è iniettiva \iff ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *al più* una volta;
- f è suriettiva \iff ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *almeno* una volta;
- f è biettiva \iff ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *un'unica* volta;

cfr. Figura 12

- Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è biettiva se e solo se esiste una funzione $g : Y \rightarrow X$ tale che

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ per ogni $x \in X$, e
- $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$ per ogni $y \in Y$.

In questo caso g è unica, si chiama *funzione inversa* di f e si scrive $f^{-1} := g$.

- Dal fatto che $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$ segue che i grafici $G(f)$ di f e $G(f^{-1})$ di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, cfr. Figura 13.

ESEMPIO. Abbiamo visto nell'esempio precedente che la funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) := x^2$ è invertibile. In questo caso la funzione inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è data da $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. In particolare, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$!!!

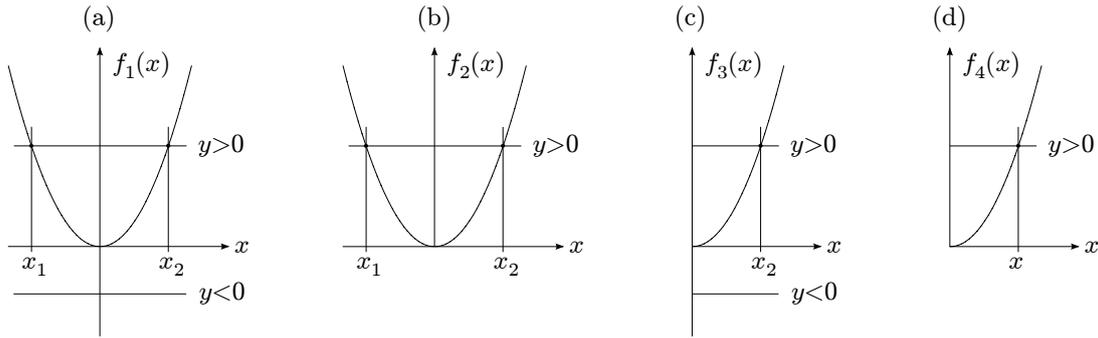


FIGURA 12. Funzione (a) non iniettiva, non suriettiva; (b) non iniettiva ma suriettiva; (c) iniettiva ma non suriettiva; (d) iniettiva e suriettiva cioè biiettiva.

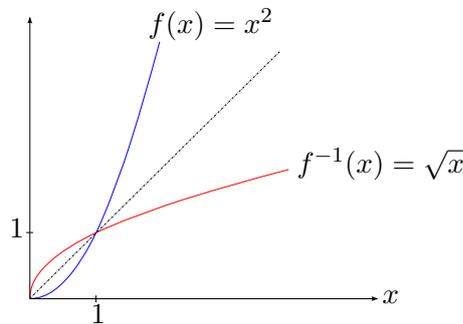


FIGURA 13. Grafico di $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Funzioni Limitate. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- *limitata superiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$;
- *limitata inferiormente* se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq f(x)$ per ogni $x \in X$;
- *limitata* se è superiormente e inferiormente limitata, cioè se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$.

ESEMPLI. • $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ è inferiormente ma non superiormente limitata;

- $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ non è inferiormente né superiormente limitata;
- $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è limitata, cfr. pagina 34.

Funzioni Simmetriche. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un dominio simmetrico rispetto a $x = 0$ (cioè $x \in X \Rightarrow -x \in X$). Allora $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- *pari*, se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in X$;
- *dispari*, se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in X$.

OSSERVAZIONI. • f è pari \iff il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y ;

- f è dispari \iff il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine, cfr. Figura 14
- Se f è dispari e $0 \in X$ (= dominio di f) allora $f(0) = 0$.
- Valgono le seguenti regole per prodotto e rapporto tra funzioni pari (=p) e dispari (=d):

$f_1 \cdot f_2$ opp. $\frac{f_1}{f_2}$	$f_1=p$	=d
$f_2=p$	p	d
=d	d	p

Inoltre vale “pari \pm pari = pari” e “dispari \pm dispari = dispari”.

ESEMPLI. • $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ è pari, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ è dispari.

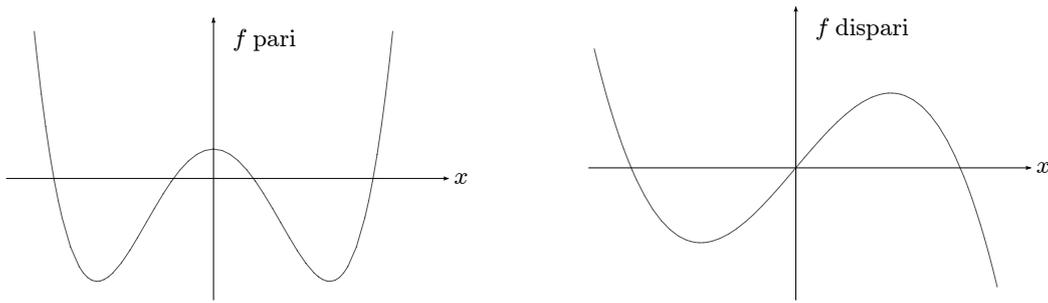


FIGURA 14. Funzione pari e dispari.

- Più in generale si ha: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è
 - pari $\iff n$ è pari,
 - dispari $\iff n$ è dispari.
- $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ è pari, $g(x) = -5x^3 - 2x$ è dispari, quindi $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^4 - 2x^2 + 4}{-5x^3 - 2x}$ è dispari.

Funzioni Monotone. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$. Allora $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- *crescente*, se $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *strettamente crescente*, se $f(x_1) < f(x_2)$;
- *decescente*, se $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *strettamente decrescente*, se $f(x_1) > f(x_2)$.
- *(strettamente) monotona*, se è (strettamente) crescente oppure (strettamente) decrescente.

ESEMPLI. • $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ è strettamente crescente;

- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ non è monotona;
- $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$ è decrescente.

Funzioni Periodiche. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $T > 0$ tale che $x + T \in X$ per ogni $x \in X$. Allora $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo* T , se T è il più piccolo numero > 0 tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

ESEMPIO. $f(x) = \sin(x)$ è periodica di periodo $T = 2\pi$.

Funzioni Elementari

Nel seguito iniziamo una lista di funzioni elementari che utilizzeremo nello svolgimento del corso.

Polinomi. Se $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ allora l'espressione

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

si dice *polinomio*. Se $a_n \neq 0$ allora n si dice *grado* di p . Un polinomio della forma $p(x) = ax^n$ si dice anche *monomio*.

ESEMPIO. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$ è un polinomio di grado $n = 3$.

Funzioni Razionali. Se p e $q \neq 0$ sono due polinomi di grado n ed m rispettivamente, l'espressione

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

si chiama *funzione razionale* con grado $n - m$. Il dominio X della funzione razionale r è data da $X = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

ESEMPIO. $r(x) = \frac{2x^2 - 1}{2x^5 - 10x^3 + 8x}$ è una funzione razionale di grado $2 - 5 = -3$ e con dominio $X = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Potenze ed Esponenziali.

PROBLEMA. Come si può definire a^r per $a > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, per esempio quanto vale

$$2^\pi = ?$$

Per risolvere questo problema, cioè per dare una definizione rigorosa di a^r , useremo alcuni risultati del Capitolo 1 procedendo in 2 passi:

1° Passo: $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Se $p \in \mathbb{Z}$ e $0 \neq q \in \mathbb{N}$, allora usando le radici (introdotte con il metodo di Erone a pagina 16) definiamo

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} := (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Per esempio

$$a^{-\frac{3}{4}} := \sqrt[4]{a^{-3}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^3, \quad 2^{3,141} := \sqrt[1000]{2^{3141}} = (\sqrt[1000]{2})^{3141}.$$

Si osservi che per definire $\sqrt[q]{a}$, per q pari, deve essere $a > 0$.

2° Passo: $r \in \mathbb{R}$. Per semplificare la presentazione consideriamo solo il caso $a > 1$ e $r > 0$, gli altri casi si possono trattare similmente.

Se $r \in \mathbb{R}$ ha la rappresentazione $r = p, \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots$ allora definiamo

$$r_n := p, \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n 000 \dots = \frac{p \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n}{10^{n+1}} \in \mathbb{Q}.$$

Per esempio per $r = \pi$ vale $r_2 = 3,141 = \frac{3141}{1000}$. Così abbiamo definito una successione $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con le proprietà

- $r_n \in \mathbb{Q}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $r_n \in [p, p+1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty}} r_n = r$ poiché $0 \leq r - r_n = 0,0 \dots 0 \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots \leq 10^{-n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$,
- $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente.

Visto che $r_n \in \mathbb{Q}$ possiamo definire

$$a_n := a^{r_n}$$

come nel primo passo. Siccome la funzione a^x con $x \in \mathbb{Q}$ per $a > 1$ è crescente, la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è

- crescente poiché $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente, e
- limitata poiché $a_n \in [a^p, a^{p+1}]$.

Quindi per il teorema sulle successioni monotone limitate (cfr. pagina 16) il limite

$$a^r := \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$$

converge e definisce la potenza a^r di base a ed esponente r .

PROPOSIZIONE 3.3. Per le potenze valgono le regole

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ per ogni $a > 0, r, s \in \mathbb{R}$;
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ per ogni $a > 0, r, s \in \mathbb{R}$;
- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ per ogni $a, b > 0, r \in \mathbb{R}$.

Fissando la base e facendo variare l'esponente come argomento, oppure il viceversa, possiamo definire altre 2 funzioni elementari.

DEFINIZIONE 3.4. • $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^r$ per $r \in \mathbb{R}$ fisso si dice *funzione potenza di esponente r* , cfr. Figura 15.

- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := a^x$ per $a > 0$ fisso si dice *funzione esponenziale di base a* , cfr. Figura 16.

OSSERVAZIONE. Per $r \geq 0$ si può estendere la funzione potenza x^r su $[0, +\infty)$ definendo $0^r := 0$. Inoltre per certi valori di $r \in \mathbb{R}$ si può definire x^r anche per $x < 0$, per esempio $x^2 = x \cdot x$ oppure $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

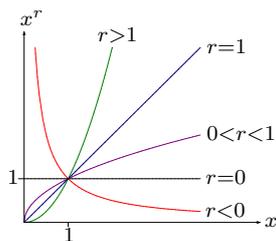


FIGURA 15. La funzione potenza.

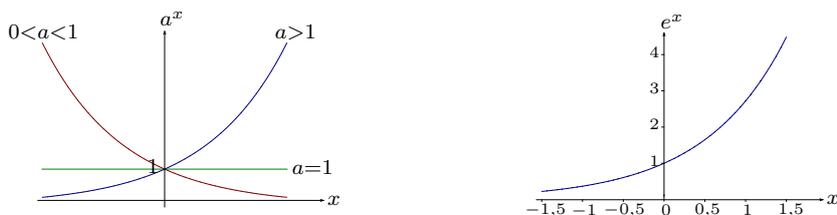


FIGURA 16. Funzione esponenziale di base a e funzione esponenziale.

L'esponenziale più importante è quello in base $a = e$ che si chiama *funzione esponenziale* e che fornisce una delle funzioni più importanti della matematica.

Funzioni Iperboliche. Con la funzione esponenziale definiamo le seguenti tre funzioni:

- *Coseno Iperbolico* $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$.
- *Seno Iperbolico* $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$.
- *Tangente Iperbolico* $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, x \in \mathbb{R}$.

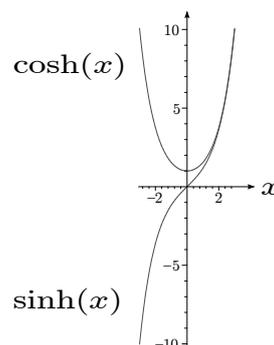
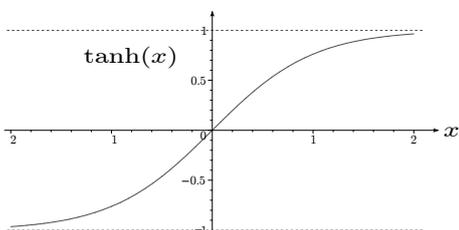


FIGURA 17. Le funzioni iperboliche.

OSSERVAZIONI. • \cosh è pari e inferiormente limitata. Infatti $\cosh(x) \geq 1$, in particolare $\cosh(x) \neq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di \cosh si chiama anche *“catenaria”* in quanto l'andamento è quello caratteristico di una catena che si lascia pendere (cfr. Figura 18).



FIGURA 18. La catenaria.

- \sinh è dispari e strettamente crescente.
- \tanh è dispari, strettamente crescente e limitata: $-1 \leq \tanh(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Vale la relazione $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

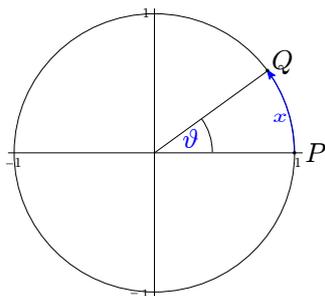


FIGURA 19. Misura di angoli in radianti.

Funzioni Circolari. Per definire le funzioni circolari dobbiamo dapprima misurare angoli in *radianti* (cfr. Figura 19).

Quindi l'angolo $\vartheta = x$ (radianti), dove $x =$ lunghezza dell'arco $PQ \in [0, 2\pi)$ orientato in senso antiorario. Per $x < 0$ oppure $x \geq 2\pi$ si può identificare x con $x \bmod 2\pi$. Per esempio $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $180^\circ = \pi$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$, $360^\circ = 2\pi$ e $3\pi \bmod 2\pi = \pi$, $-5\pi \bmod 2\pi = \pi$ etc.

Introduciamo ora con $\vartheta = x$ radianti graficamente le funzioni

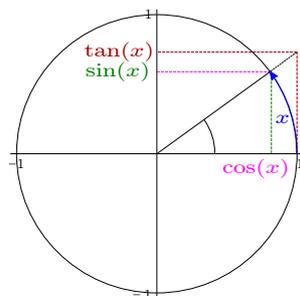


FIGURA 20. Definizione delle funzioni circolari.

- *Seno*: $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
- *Coseno*: $\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
- *Tangente*: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2} \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

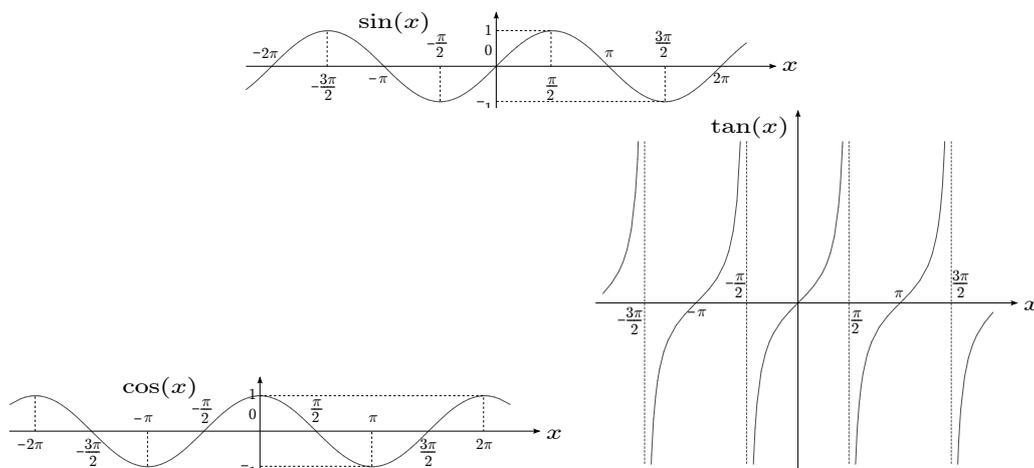


FIGURA 21. Grafici di sin, cos e tan.

OSSERVAZIONI. • \cos è pari, limitata ($-1 \leq \cos(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$) e periodica di periodo $T = 2\pi$.

- \sin è dispari, limitata ($-1 \leq \sin(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$) e periodica di periodo $T = 2\pi$.
 - \tan è definita per $x \neq \frac{2k+1}{2} \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dispari, né inferiormente né superiormente limitata ma periodica di periodo $T = \pi$.
 - Per le funzioni circolari valgono numerose relazioni, per esempio
 - $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (ciò segue dal Teorema di Pitagora, cfr. Figura 20);
 - $\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
 - $\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- Le ultime due relazioni si chiamano *formule di prostaferesi*.

Limiti delle Funzioni Reali

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \overline{\mathbb{R}}$ consideriamo il seguente

PROBLEMA. Studiare il comportamento di $f(x)$ per x vicino (ma differente!) a c .

ESEMPIO. Se $X = \mathbb{N}$ e $c = +\infty$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ diventa una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dove $a_n = f(n)$ e il problema si trasforma nello studio di a_n per n “vicino a” $+\infty$, cioè ci ha portato al concetto di limite per le successioni.

Per analizzare questo problema per una funzione qualsiasi ci serve dapprima una

DEFINIZIONE 3.5. $c \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice *punto di accumulazione* dell' insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con

- $x_n \in X$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $x_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$.

I primi 2 punti si possono brevemente scrivere come $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$. Quindi c è un punto di accumulazione di X se in $X \setminus \{c\}$ si può avvicinare al punto c .

ESEMPLI. • $c = 3$ non è un punto di accumulazione di \mathbb{N} in quanto non esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \setminus \{3\}$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$.

- $c = +\infty$ è infatti l'unico punto di accumulazione di \mathbb{N} .
- $c = -1$ non è un punto di accumulazione di $[0, +\infty)$.
- Se $I \subset \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo con gli estremi a e b , allora c è un punto di accumulazione di $I \iff c \in [a, b]$.

Ora siamo in grado di generalizzare il concetto di limite dalle successioni alle funzioni reali arbitrarie.

DEFINIZIONE 3.6 (Limiti per le Funzioni). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale e sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di X . Allora diremo che

f tende a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c

se per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$ segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$.

In questo caso scriviamo

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l} \quad \text{oppure} \quad \boxed{f(x) \rightarrow l \text{ per } x \rightarrow c}.$$

OSSERVAZIONI. • Il limite, se esiste, è unico.

- Se nel seguito scriviamo “ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ” supponiamo sempre che c sia un punto di accumulazione del dominio X di f . Per esempio $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x}$ non è ammesso poiché $c = -1$ non è un punto di accumulazione del dominio $X = [0, +\infty)$ della radice.
- Il fatto che nella definizione di limite consideriamo soltanto successioni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergenti a c con $x_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ riflette il fatto che studiamo $f(x)$ per x vicino ma differente a c .

- Il concetto di limite per le funzioni come definito sopra si basa su quello del limite per le successioni. Esiste anche un'altra possibilità di introdurre limiti per le funzioni che non fa riferimento alle successioni. Questa alternativa dipende però dal fatto se c ed l sono finiti oppure infiniti e quindi servono molti casi per coprire tutte le possibilità, cfr. pagina 161 nell'Appendice.

ESEMPLI. • $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$. Dal grafico su pagina 34 si vede che $0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi per $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ risulta

$$\underbrace{0}_{\rightarrow 0} < |\sin(x_n)| \leq \underbrace{|x_n|}_{\rightarrow 0} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

e per il teorema dei Carabinieri segue $\sin(x_n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ per definizione.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$. Per la formula di prostaferesi (cfr. pagina 35) segue

$$1 - \cos(x) = \cos(0) - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Allora per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ risulta

$$1 - \cos(x_n) = 2 \sin^2\left(\frac{x_n}{2}\right) \rightarrow 2 \cdot 0^2.$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 0$ cioè $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ non esiste. Definiamo $f(x) := \frac{|x|}{x}$ per $x \neq 0$. Allora



FIGURA 22. Funzione segno.

Quindi per $x_n := \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ segue $f(x_n) = (-1)^n$ che non ammette limite per $n \rightarrow +\infty$. Ciò dimostra che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ non esiste.

OSSERVAZIONE. Nonostante l'ultimo limite di $f(x) = \frac{|x|}{x}$ per $x \rightarrow 0$ non esista, si ha che

- $f(x)$ tende a $+1$ se ci avviciniamo a $c = 0$ da destra,
- $f(x)$ tende a -1 se ci avviciniamo a $c = 0$ da sinistra.

Per precisare ciò ci serve una

DEFINIZIONE 3.7 (Limite Destro e Sinistro). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che

- $x_n \rightarrow c$ da destra per $n \rightarrow +\infty$, se $x_n \rightarrow c$ e $x_n \geq c$ definitivamente. In questo caso usiamo la notazione: $x_n \rightarrow c^+$ per $n \rightarrow +\infty$ oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c^+$.
- $x_n \rightarrow c$ da sinistra per $n \rightarrow +\infty$, se $x_n \rightarrow c$ e $x_n \leq c$ definitivamente. In questo caso usiamo la notazione: $x_n \rightarrow c^-$ per $n \rightarrow +\infty$ oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c^-$.
- $f(x) \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c da destra, se per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $x_n \rightarrow c^+$ segue $f(x_n) \rightarrow l$ per $n \rightarrow +\infty$. In questo caso usiamo la notazione: $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow c^+$ oppure $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$.

- $f(x) \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c da sinistra, se per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $x_n \rightarrow c^-$ segue $f(x_n) \rightarrow l$ per $n \rightarrow +\infty$. In questo caso usiamo la notazione: $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow c^-$ oppure $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$.

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ si dicono *limite destro* e *limite sinistro* rispettivamente.

- ESEMPLI.**
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

OSSERVAZIONI. • $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$.

- Il concetto di limite destro e sinistro si possono definire anche senza l'utilizzo delle successioni. Però facendo così si devono considerare vari casi secondo le possibilità $c, l \in \mathbb{R}$, $c, l = \pm\infty$, cfr. pagina 161 nell'Appendice.

Limiti ed Asintoti.

- Se $\lim_{x \rightarrow c(\pm)} f(x) = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$, allora si dice che f ha un *asintoto verticale* $x = c$.
- Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$, allora si dice che f ha un *asintoto orizzontale* $y = l$.

- ESEMPLI.**
- La funzione $\tan(x)$ ha asintoti verticali nei punti $x_k = \frac{2k+1}{2} \cdot \pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, cfr. il grafico a pagina 34.
 - La funzione $\tanh(x)$ ha asintoti orizzontali nei punti $y = -1, +1$, cfr. il grafico su pagina 33.

Come nel caso delle successioni esistono anche per i limiti delle funzioni.

Regole per il Calcolo dei Limiti. Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l_2$ con $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, allora

- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$;
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$;
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$;
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{g(x)} = (l_1)^{l_2}$ se $l_1 > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |l_1|$.

Queste regole seguono direttamente dalle regole corrispondenti per le successioni. Inoltre valgono anche per il limite destro e sinistro e anche per $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ se al limite si ottiene una forma determinata.

In sostanza il risultato precedente manifesta il fatto che le operazioni algebriche sono compatibili con il concetto di limite. Cioè non ha importanza se si fa prima l'operazione e poi il limite oppure viceversa, se tutte le forme ottenute sono determinate.

Anche i risultati riguardanti limiti e ordinamento per le successioni si generalizzano facilmente alle funzioni.

Limiti e Ordinamento. Se $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e $f(x) \rightarrow l_1$, $g(x) \rightarrow l_2$ per $x \rightarrow c$, allora

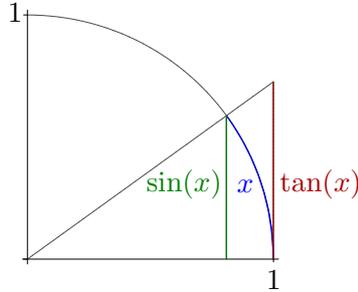
- $l_1 \leq l_2$ (*Teorema del Confronto*);
- se inoltre per $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ vale $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ per $x \in X$ e $l_1 = l_2$, allora anche $h(x) \rightarrow l_1$ per $x \rightarrow c$ (*Teorema dei Carabinieri*).

Come già per le successioni anche per calcolare limiti di funzioni il Teorema dei Carabinieri è spesso molto utile. L'idea per la sua applicazione è di incastrare l'espressione che si vuole studiare ($= h(x)$) tra due carabinieri ($= f(x)$ e $g(x)$) che sono più semplici da studiare e ammettono lo stesso limite. Consideriamo alcuni esempi.

Tre Limiti Notevoli.

$$(1) \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

DIMOSTRAZIONE. Graficamente si vede che per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ vale



$$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

FIGURA 23. Relazione tra x , $\sin(x)$ e $\tan(x)$.

dividendo per $\sin(x) > 0$ segue

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

quindi per gli inversi otteniamo

$$\underbrace{1}_{\rightarrow 1} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Inoltre $\frac{\sin(x)}{x}$ è pari e quindi dal Teorema dei Carabinieri segue che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. \square

$$(2) \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

DIMOSTRAZIONE. Per $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ vale

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{\overbrace{1 - \cos^2(x)}^{=\sin^2(x)}}{x^2 \cdot (1 + \cos(x))} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{\rightarrow 1^2=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos(x)}}_{\rightarrow \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

per $x \rightarrow 0$. \square

$$(3) \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

DIMOSTRAZIONE. Partiamo dalla relazione $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli segue

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x \quad \text{se } \frac{x}{n} \geq -1 \text{ cioè } n \geq -x$$

Allora $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$ definitivamente e quindi per il teorema del confronto risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \geq 1 + x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in questa relazione x con $-x$ otteniamo inoltre

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \geq \underbrace{1-x}_{>0 \text{ per } x < 1}$$

e quindi per gli inversi vale

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{se } x < 1.$$

Riassumendo abbiamo verificato che per ogni $x < 1$ vale

$$1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad (\text{sottraendo } 1) \Rightarrow$$

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \quad (\text{dividendo per } x \neq 0) \Rightarrow$$

$$\text{se } 1 > x > 0: \quad \underbrace{1}_{\rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow 0^+} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow 0^+} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\text{se } x < 0: \quad \underbrace{1}_{\rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow 0^-} \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow 0^-} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

per il Teorema dei Carabinieri. \square

Anche il teorema sulla convergenza delle successioni monotone (cfr. pagina 16) si generalizza facilmente alle funzioni.

TEOREMA 3.8. *Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona allora*

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) =: l^- \in \overline{\mathbb{R}} \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) =: l^+ \in \overline{\mathbb{R}}$$

esistono. Inoltre vale

$$l^- = \sup\{f(x) : x \in X, x < c\}, \quad l^+ = \inf\{f(x) : x \in X, x > c\} \quad \text{se } f \text{ è crescente,}$$

$$l^- = \inf\{f(x) : x \in X, x < c\}, \quad l^+ = \sup\{f(x) : x \in X, x > c\} \quad \text{se } f \text{ è decrescente.}$$

Passiamo ora ai

Limiti per le Funzioni Composte. Se per $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ e $c, l, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ vale

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = y_0$,
- $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$,
- esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in X$ con $0 < |x - c| < \delta$

allora

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = l.$$

Questo risultato *non* vale senza la terza condizione che riflette il fatto che per l'esistenza e il valore del limite il valore della funzione nel punto limite è indifferente.

ESEMPIO. Sappiamo che

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ (qui $f = \sin$, $c = 0$ e $y_0 = 0$),
- $\lim_{y \rightarrow 0} \cos(y) = 1$ (qui $g = \cos$, $l = 1$),
- $\sin(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x| < \pi$ (quindi possiamo scegliere $\delta := \pi$)

Con il risultato precedente risulta che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sin(x)) = 1$$

Funzioni Continue di una Variabile Reale

Funzioni Continue

OSSERVAZIONE. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Per l'esistenza e il valore del limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$

- non è importante che $c \in X$, e
- che, nel caso $c \in X$, $f(c) = l$.

Queste due condizioni invece in un certo senso caratterizzano funzioni continue.

DEFINIZIONE 4.1 (Continuità). $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- *continua in* $x_0 \in X$ se per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \rightarrow x_0$ segue $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ per $n \rightarrow +\infty$.
- *continua*, se è continua in ogni $x \in X$.

OSSERVAZIONI. • La continuità si può anche definire senza fare riferimento alle successioni: f è continua in $x_0 \iff$

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$.

- Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione di X , allora f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Se $x_0 \in X$ non è un punto di accumulazione di X (in questo caso si dice anche che x_0 è un punto isolato), allora f è sempre continua in x_0 .

Dalla definizione di continuità e dalle regole per il calcolo dei limiti segue facilmente la seguente

PROPOSIZIONE 4.2. Se $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue (in $x_0 \in X$), allora anche

- $f \pm g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue (in x_0),
- $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (in x_0),
- $\frac{f}{g} : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (in x_0 se $g(x_0) \neq 0$), dove $X_0 := \{x \in X : g(x) \neq 0\}$,
- $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (in x_0).

Quindi somme, differenze, prodotti, rapporti e moduli di funzioni continue sono anche continue.

Da questo risultato segue che per ogni $X \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme

$$C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$$

è uno spazio vettoriale (o addirittura un'algebra).

Con il teorema sul limite delle funzioni composte si può dimostrare il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 4.3. Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $y_0 := f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 . Quindi la composizione di funzioni continue è sempre continua.

Con le due proposizioni precedenti e usando i limiti notevoli è facile verificare la continuità di vari funzioni elementari.

ESEMPLI. • *Polinomi:* $f(x) = 1$ e $g(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$ sono continue $\Rightarrow h(x) := x^k$ è continua per ogni $k \in \mathbb{N} \Rightarrow p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ è continua per ogni scelta di $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ cioè ogni polinomio è continuo.

- *Funzioni razionali*: Ogni funzione razionale è continua (nel suo dominio!), essendo il rapporto di due polinomi che sono continui.
- *Modulo*: $f(x) = |x|$ per $x \in \mathbb{R}$ è continuo (usare l'ultima osservazione a pagina 4).
- *Funzioni circolari*: Per la formula di prostaferesi vale per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}_{\text{limitata}} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

quindi \sin è continua. Similmente segue che anche \cos è continua e quindi anche $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ è continua.

- *Funzione esponenziale*: Per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ e $h := x - x_0$ vale $x \rightarrow x_0 \iff h \rightarrow 0$. Quindi

$$\begin{aligned} e^x - e^{x_0} &= (x - x_0) \cdot e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \\ &= h \cdot e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 0 \cdot e^{x_0} \cdot 1 = 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ciò dimostra $e^x \rightarrow e^{x_0}$ per $x \rightarrow x_0$ e di conseguenza la funzione esponenziale è continua.

- *Funzioni iperboliche*: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sono continue e quindi anche $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ è continua.
- Se per $l \in \mathbb{R}$ definiamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ l & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

allora f è sempre continua in ogni $x_0 \neq 0$. Inoltre f è continua in $x_0 = 0 \iff$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) = l$$

cioè $\iff l = 1$. Si dice anche che $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ha una *discontinuità rimovibile* in $x = 0$.

- Se per $l \in \mathbb{R}$ definiamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ l & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

allora f per qualsiasi scelta di $l \in \mathbb{R}$ è discontinua (cioè non continua) in $x = 0$.

- *Funzione di Dirichlet*: Se definiamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

allora f è discontinua in ogni $x \in \mathbb{R}$.

Funzioni Continue su Intervalli

PROBLEMA. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

- verificare che f ammette uno zero, cioè che esiste $c \in X$ tale che $f(c) = 0$,
- calcolare (un valore approssimativo per) c .

Il seguente teorema, che è uno dei più importanti risultati del corso, fornisce una soluzione a questo problema sotto alcune ipotesi su f . Nel seguito, per intervalli $[a, b]$, supponiamo sempre che sia $a < b$.

TEOREMA 4.4 (Teorema degli Zeri). Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto (cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$), allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Usiamo il *metodo di bisezione*: Esiste una successione $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tale che

- (i) $[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$,
- (ii) la lunghezza di I_n è data da $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$,
- (iii) $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$.

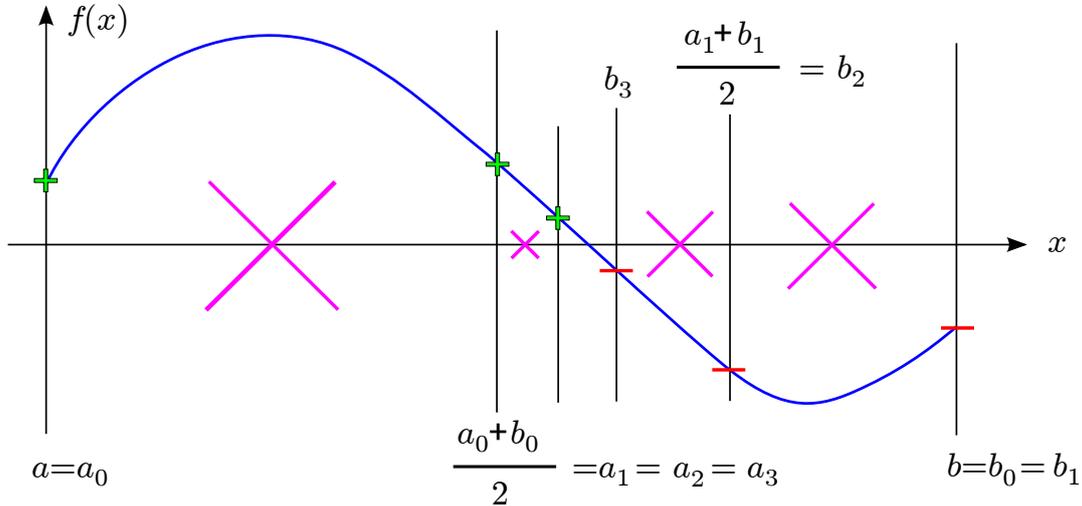


FIGURA 24. Il metodo di bisezione.

Allora, per la proprietà (i) abbiamo che

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b$$

da cui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono monotone e limitate e quindi convergenti. Sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =: c_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =: c_2.$$

Da (ii) segue

$$\underbrace{b_n}_{\rightarrow c_2} = \underbrace{a_n}_{\rightarrow c_1} + \underbrace{\frac{b-a}{2^n}}_{\rightarrow \frac{b-a}{+\infty} = 0} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

e quindi $c_1 = c_2 =: c$. Infine per (iii), il teorema del confronto e per la continuità di f risulta che

$$0 \geq \underbrace{f(a_n)}_{\rightarrow f(c)} \cdot \underbrace{f(b_n)}_{\rightarrow f(c)} \rightarrow f^2(c) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi $f^2(c) \leq 0$ che è possibile solo se $f(c) = 0$. □

OSSERVAZIONE. Il teorema degli zeri non soltanto stabilisce l'esistenza di uno zero c per f ma la dimostrazione dà anche un modo per trovare un valore approssimativo di c . In casi come questo si dice anche che la dimostrazione è *costruttiva*.

Dal Teorema degli zeri segue facilmente la seguente generalizzazione.

TEOREMA 4.5 (Teorema dei Valori intermedi). Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualsiasi (non necessariamente chiuso), $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e siano

$$m := \inf f := \inf\{f(x) : x \in I\}, \quad M := \sup f := \sup\{f(x) : x \in I\}.$$

Allora per ogni $y \in (m, M)$ esiste $x \in I$ tale che $f(x) = y$. In altre parole, f assume tutti i valori tra $m = \inf f$ e $M = \sup f$.

La dimostrazione si fa applicando il Teorema degli Zeri alla funzione $\tilde{f}(x) := f(x) - y$. Questo teorema ha delle applicazioni molto importanti. Come esempio dimostreremo l'esistenza dei

Logaritmi. Sia $0 < a \neq 1$. Allora per ogni $y > 0$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. Questo valore x si chiama *logaritmo di y in base a* e si scrive

$$x =: \log_a(y).$$

Per la base $a = e$ useremo la notazione $\ln(y) := \log_e(y)$.

DIMOSTRAZIONE. Procediamo in 2 passi:

1° Caso: $a = e$. Abbiamo visto (cfr. pagina 38) che $e^x \geq 1 + x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi $\sup\{e^x : x \in \mathbb{R}\} \geq \sup\{1 + x : x \in \mathbb{R}\} = +\infty \Rightarrow M := \sup\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$.

Inoltre,

$$0 < e^x = \frac{1}{\underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow +\infty}} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \Rightarrow m := \inf\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = 0.$$

Visto che $I := \mathbb{R}$ è un intervallo e e^x , $x \in I$ è continua, per il teorema dei valori intermedi per ogni $y \in (m, M) = (0, +\infty)$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $e^x = y$. Questo x è unico poiché e^x è strettamente crescente.

2° Caso: $0 < a \neq 1$. Cerchiamo per $y > 0$ un $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. Però

$$e^{x \cdot \ln(a)} = (e^{\ln(a)})^x = \underline{a^x} = y = e^{\ln(y)} \iff x \cdot \ln(a) = \ln(y)$$

e quindi

$$x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}. \quad \square$$

Regole per i Logaritmi. Siano $0 < a, b \neq 1$, $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{R}$. Allora

- $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$, in particolare $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$,
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$,
- $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$ in particolare $\log_a(x) = \log_a(e) \cdot \ln(x)$.

OSSERVAZIONE. Con l'esistenza dei logaritmi abbiamo dimostrato che per $0 < a \neq 1$ la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è invertibile con $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. In particolare i grafici di a^x e $\log_a(x)$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

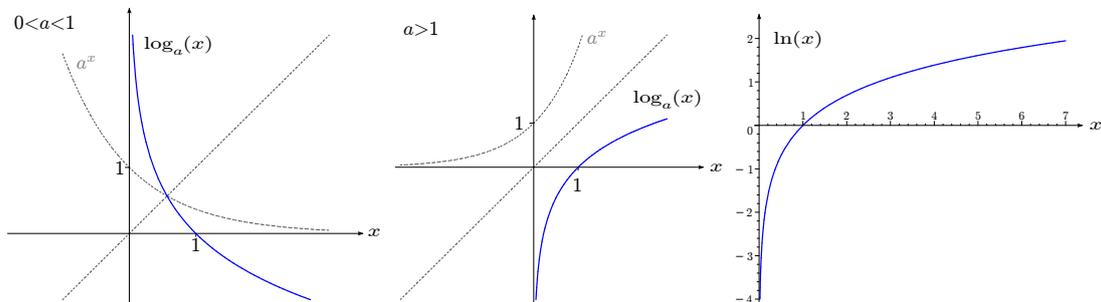


FIGURA 25. I Logaritmi.

Visto che in questo capitolo stiamo studiando funzioni continue si pone il

PROBLEMA. $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua?

La risposta è *si* per il seguente

TEOREMA 4.6. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in C(I)$. Allora anche $J := f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è un intervallo e

- $f : I \rightarrow J$ è invertibile $\iff f$ è strettamente crescente oppure strettamente decrescente;
- se f è invertibile, $f^{-1} : J \rightarrow I$ è continua.

Il teorema precedente *non* vale se il dominio di f non è un intervallo.

ESEMPIO. Consideriamo $f : [-1, 0] \cup (1, 2] \rightarrow [0, 2]$, $f(x) = |x|$. Allora f è continua e invertibile ma non è strettamente monotona e $f^{-1} : [0, 2] \rightarrow [-1, 0] \cup (1, 2]$ è discontinua in $x = 1$.

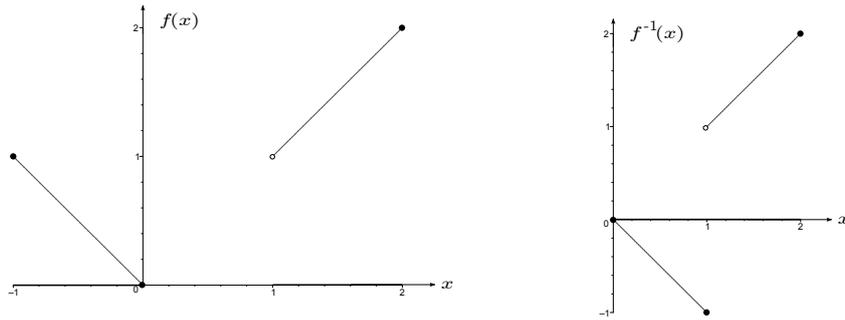


FIGURA 26. Funzione continua con inversa discontinua.

Altre Funzioni Invertibili

OSSERVAZIONE. Possiamo utilizzare lo stesso schema che abbiamo usato per invertire l'esponenziale a^x per invertire altre funzioni f . Più precisamente, usiamo

- il teorema dei valori intermedi per verificare la suriettività di f ,
- la stretta monotonia per ottenere l'iniettività di f ,
- il teorema sulla continuità della funzione inversa per stabilire la continuità di f^{-1} .

In questa maniera possiamo costruire altre funzioni elementari.

Radici. Consideriamo $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^n$ per $n \geq 1$. Allora, f è continua, strettamente crescente, il dominio $X = [0, +\infty)$ è un intervallo, $\inf f = \min f = 0$ e $\sup f = +\infty$. Quindi f è invertibile e la funzione inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è continua e data da $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

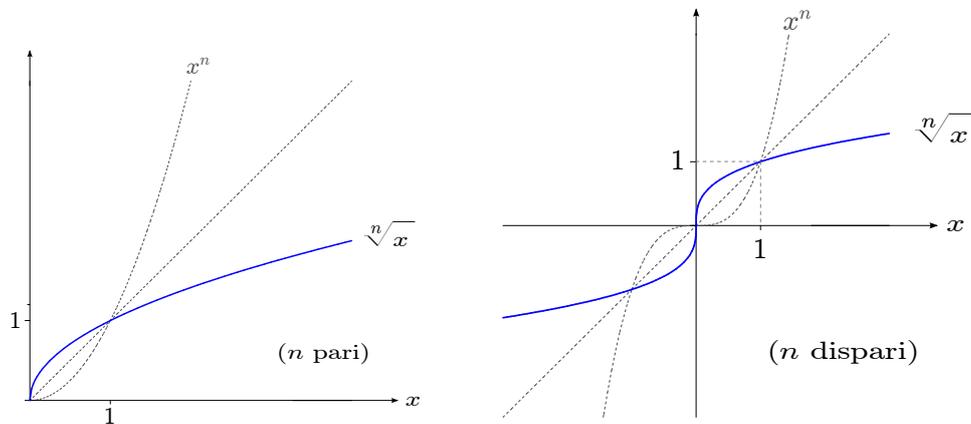


FIGURA 27. La radice n -esima.

OSSERVAZIONE. Se nel precedente n è dispari, allora possiamo considerare f anche come funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In questo caso f rimane continua, strettamente crescente con $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$ cioè è invertibile con $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. In altre parole, per n dispari la radice $\sqrt[n]{x}$ è anche definita per argomenti $x < 0$, per esempio $\sqrt[3]{-8} = -2$. Invece per n pari e $x < 0$ la radice $\sqrt[n]{x}$ non ha senso nel campo dei numeri reali, per esempio $\sqrt{-1}$ non è più un numero reale ma *complesso*. Al livello della funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ cioè si rispecchia nel fatto che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per n pari non è suriettiva (e neanche iniettiva, cfr. pagina 29).

Potenze. Dal paragrafo precedente sappiamo che $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ definisce una funzione continua per ogni $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Più in generale vale che

$$x^r = (e^{\ln(x)})^r = e^{r \cdot \ln(x)}, \quad x > 0$$

come composizione di funzioni continue è continua.

Inverse delle Funzioni Circolari. (Cfr. Figura 28) Considerando il grafico della funzione $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (cfr. Figura 21) si vede che non è invertibile non essendo né suriettiva né iniettiva. La suriettività, però si ottiene considerando come codominio l'insieme $[\min \sin, \max \sin] = [-1, 1]$ mentre per ottenere l'iniettività basta considerare soltanto una parte del dominio \mathbb{R} in cui la funzione \sin è strettamente monotona. Perciò ci sono infinite scelte ma generalmente si restringe il dominio all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi consideriamo ora

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

che così diventa invertibile. Nella stessa maniera, considerando

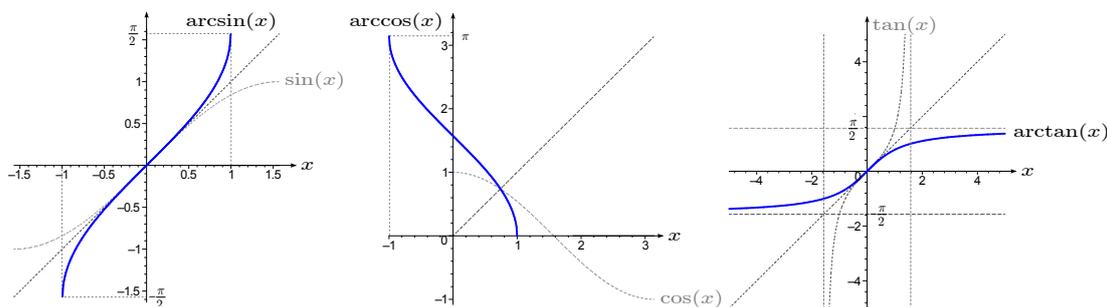


FIGURA 28. Inverse delle funzioni circolari.

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \quad \text{e} \quad \tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$$

anche loro diventano invertibili e tutte le inverse *arcoseno*, *arcocoseno* e *arcotangente*

$$\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

$$\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

sono nuovamente continue.

Inverse delle Funzioni Iperboliche. (Cfr. Figura 29) Ragionando come prima si vede che le funzioni iperboliche $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cosh : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ e $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ sono invertibili e le loro inverse *areaseñoiperbolico*, *areacosenoiperbolico* e *areatangenteiperbolico*

$$\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arcosh} := \cosh^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty),$$

$$\operatorname{artanh} := \tanh^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

sono nuovamente continue.

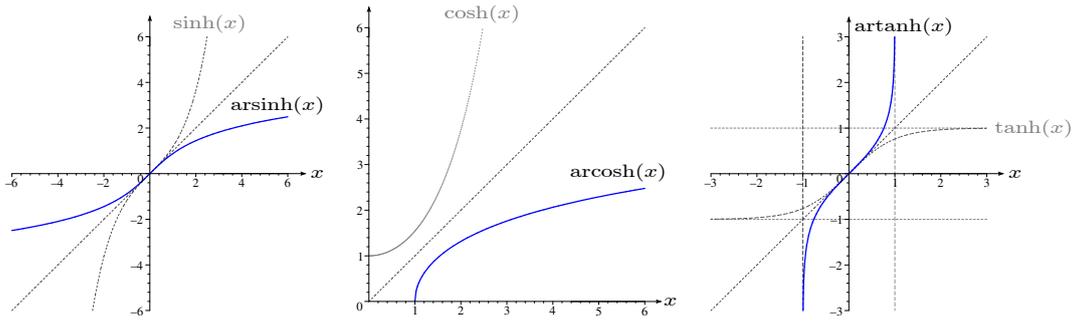


FIGURA 29. Inverse delle funzioni iperboliche.

OSSERVAZIONE. Visto che $\sinh(x) = y \iff x = \operatorname{arsinh}(y)$, risolvendo l'equazione $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ per x si ottiene la rappresentazione

$$\operatorname{arsinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right), \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

Similmente segue

$$\operatorname{arcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right), \quad \text{per ogni } y \geq 1,$$

$$\operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right), \quad \text{per ogni } y \in (-1, 1).$$

Funzioni Continue su Intervalli Chiusi e Limitati

Ci poniamo il seguente

PROBLEMA. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, determinare, se esistono, il valore minimo e quello massimo di f , cioè

$$m := \min f := \min\{f(x) : x \in X\}, \quad M := \max f := \max\{f(x) : x \in X\},$$

La soluzione del problema si svolge in 2 passi:

- (1) Verificare che minimo e massimo di f esistono,
- (2) trovare x_0, x_1 tale che $\min f = f(x_0)$, $\max f = f(x_1)$.

Il primo punto si risolve con il seguente teorema mentre affronteremo il secondo punto nel prossimo capitolo usando il calcolo differenziale.

TEOREMA 4.7 (Teorema di Weierstraß). Se $f \in C[a, b]$, allora esistono $m := \min f$ e $M := \max f$. Inoltre, l'immagine $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\} = [m, M]$, in particolare

- f è limitata;
- esistono $x_0, x_1 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in [a, b]$;
- per ogni $y \in [m, M]$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$.

OSSERVAZIONI. • Il Teorema di Weierstraß vale soltanto su intervalli chiusi e limitati cioè del tipo $[a, b]$.

- La funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1 + e^{-\sin\sqrt{x+2}}}{2 + \cos|9x - \frac{1}{2}| + \arctan((e+x^2)\pi)}\right)}$$

è una composizione di funzioni continue e quindi continua. Per Weierstraß ammette minimo e massimo che, però, saranno quasi impossibili da determinare. Quindi Weierstraß è un risultato di esistenza ma non aiuta per trovare x_0, x_1 e $\min f = f(x_0)$ e $\max f = f(x_1)$.

Calcolo Differenziale di Funzioni di una Variabile

PROBLEMI. Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in (a, b)$,

- (i) Trovare la *retta tangente* t al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ (problema geometrico), e
- (ii) trovare un'*approssimazione lineare* $g(x)$ (cioè della forma $g(x) = \alpha \cdot x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) per $f(x)$ per x vicino a x_0 (problema analitico).

Iniziamo a studiare il problema (i). Come vedremo nel seguito la sua soluzione risolve anche il problema (ii). Per risolvere (i) consideriamo prima la *retta secante* s_h attraverso i punti

$$P_0 = (x_0, f(x_0)) \quad \text{e} \quad P_h := (x_0 + h, f(x_0 + h)) \quad \text{per } h \neq 0.$$

L'equazione della retta s_h è data da

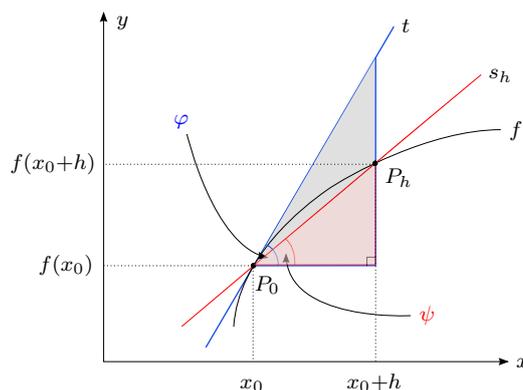


FIGURA 30. Retta secante e tangente.

$$\begin{aligned} s_h(x) &= f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{pendenza di } s_h} \cdot (x - x_0). \\ &=: \text{rapporto incrementale} \end{aligned}$$

Quindi solo il rapporto incrementale dipende da h che, nel passo successivo, mandiamo a 0.

Derivata: Definizione e prime Proprietà

Considerando il limite del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$ arriviamo alla seguente

DEFINIZIONE 5.1. Se per $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ converge

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \underbrace{=}_{x=x_0+h} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile* in x_0 con *derivata* $f'(x_0)$. Se f è derivabile in ogni $x_0 \in (a, b)$ allora si dice *derivabile* e la funzione $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è la *derivata* di f . Altre notazioni: $f' = \frac{df}{dx} = Df$.

Se f è derivabile in x_0 allora otteniamo l'equazione $t(x)$ della retta tangente t sostituendo il rapporto incrementale nell'equazione della retta secante s_h con la derivata $f'(x_0)$, cioè

$$\boxed{t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Quindi (cfr. Figura 30)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \tan(\varphi) = \text{pendenza della retta tangente } t, \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \tan(\psi) = \text{pendenza della retta secante } s_h \end{aligned}$$

In particolare $f'(x_0) = 0$ significa che la retta tangente ha pendenza 0, cioè è orizzontale. Consideriamo alcuni

ESEMPLI. • Se f è costante cioè se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c$ per ogni $x \in (a, b)$ allora il rapporto incrementale è sempre uguale a 0. Quindi una funzione costante è sempre derivabile con derivata nulla.

- Sia $f(x) = x^n$ per $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora, dalla formula del binomio di Newton segue usando che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $x_0^0 = h^0 = 1$ e $\binom{n}{n-1} = n$ che

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{\left(\binom{n}{0} x_0^0 h^n + \binom{n}{1} x_0^1 h^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-2} x_0^{n-2} h^2 + \overbrace{\binom{n}{n-1} x_0^{n-1} h^1}^{=n \cdot x_0^{n-1} \cdot h} + \overbrace{\binom{n}{n} x_0^n h^0}^{=x_0^n} \right) - x_0^n}{h} \\ &= \frac{\left(\binom{n}{0} x_0^0 h^{n-1} + \binom{n}{1} x_0^1 h^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2} x_0^{n-2} h^1 + n \cdot x_0^{n-1} \right) \cdot h}{h} \\ &= \binom{n}{0} x_0^0 h^{n-1} + \binom{n}{1} x_0^1 h^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2} x_0^{n-2} h^1 + n \cdot x_0^{n-1} \\ &\rightarrow n \cdot x_0^{n-1} = f'(x_0) \quad \text{per } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi $f(x) = x^n$ è derivabile per ogni $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ con

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Per esempio, $(x^5)' = 5 \cdot x^4$.

- Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\rightarrow 1} \rightarrow e^{x_0} \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Quindi $f(x) = e^x$ è derivabile con

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

cioè $f = f'$ che è una proprietà molto particolare e che (a meno di una costante moltiplicativa) caratterizza la funzione esponenziale.

- Sia $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Allora usando la formula di prostaferesi, il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e la continuità della funzione \cos risulta

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}_{\rightarrow \cos(x_0)} \rightarrow \cos(x_0) = f'(x_0) \quad \text{per } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi $f(x) = \sin(x)$ è derivabile con

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$$

Similmente segue che $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile con

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$$

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che \sin è una funzione dispari (come anche $-\sin$) mentre \cos è pari. Nell'esempio precedente abbiamo visto che $\sin' = \cos$ e $\cos' = -\sin$ e quindi la derivata ha trasformata una funzione dispari in un una pari e viceversa. Ciò vale sempre, cioè se f è derivabile e

- f dispari $\Rightarrow f'$ pari,
- f pari $\Rightarrow f'$ dispari.

- Sia $f(x) := |x|$. Allora f non è derivabile in $x_0 = 0$, infatti abbiamo

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 & \text{se } h > 0, \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

e quindi non esiste il limite del rapporto incrementale in $x_0 = 0$ per $h \rightarrow 0$. Comunque in questo esempio esistono limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale. Questa osservazione dà luogo alla seguente

DEFINIZIONE 5.2. Se per $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ converge

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_+(x_0) = \textit{derivata destra}$$

oppure

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_-(x_0) = \textit{derivata sinistra}$$

allora diremo che f è *derivabile da destra* oppure *derivabile da sinistra* in x_0 .

ESEMPIO. $f(x) := |x|$ è derivabile da destra e anche da sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = +1$, $f'_-(0) = -1$.

OSSERVAZIONE. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b) \iff f$ è derivabile da destra e da sinistra in x_0 con $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Studiamo ora il legame tra derivabilità e continuità.

PROPOSIZIONE 5.3. Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora è anche continua in x_0 .

DIMOSTRAZIONE.

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e quindi f è continua in x_0 . \square

OSSERVAZIONE. Non vale il contrario cioè f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile, per esempio $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$.

ESERCIZIO. (Metodo di Erone, cfr. pagina 16) Sia $f(x) := x^k - a$ per $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

- Calcolare l'equazione della retta tangente t al grafico di f nel punto $x_0 > 0$.
- Verificare che l'intersezione tra t e l'asse x è data da

$$x_1 := \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)x_0 + \frac{a}{x_0^{k-1}} \right).$$

Regole per la Derivazione

Cerchiamo ora modi per semplificare il calcolo delle derivate.

Derivazione di Somme, Prodotti e Rapporti di Funzioni. Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in x_0 , allora

- (i) per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0)}$$

- (ii) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

- (iii) se $g(x_0) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

In particolare

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo soltanto (ii). Perciò studiamo il rapporto incrementale del prodotto utilizzando che g è continua in x_0

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x)) + (f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\rightarrow g(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \\ &\rightarrow f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad \square \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. La regola (i) stabilisce che la derivazione è un'operazione lineare, cioè la derivata di una combinazione lineare e la combinazione lineare delle derivate. Inoltre implica che l'insieme

$$C^1(a, b) := \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} f \text{ è derivabile e} \\ f' \text{ è continua} \end{array} \right. \right\}$$

è uno spazio vettoriale. Se $f \in C^1(a, b)$ si dice anche che f è derivabile con continuità (qui la continuità si riferisce a f' non a f che essendo derivabile è anche continua).

Con queste regole diventa semplice verificare la derivabilità di varie funzioni elementari.

ESEMPLI. • Visto che ogni monomio x^k per $k = 1, 2, 3, \dots$ è derivabile, per le prime due regole ogni *polinomio* è derivabile con

$$p'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

Per esempio, $(3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11)' = 12x^3 - 21x^2 + 4x$.

- Per l'esempio precedente e la terza regola, ogni *funzione razionale* è derivabile. Per esempio per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$ vale

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Infatti questa regola abbiamo visto precedentemente per $n = 1, 2, 3, \dots$ (cfr. pagina 48), per $n = 0$ vale poiché la derivata di una funzione costante $= 0$, mentre per $n = -1, -2, -3, \dots$ è stata appena dimostrata.

- Visto che sin e cos sono derivabili anche la funzione $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ è derivabile con

$$\boxed{\tan'(x)} = \frac{\cos(x) \cdot \sin'(x) - \cos'(x) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + \tan^2(x) \end{cases}$$

Derivazione delle Funzioni Composte. Sia $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e sia $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 := f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

Questa formula si chiama *Regola della Catena*.

ESEMPLI. • Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, allora anche $h(x) := g(-x)$ è derivabile poiché $h(x) = (g \circ f)(x)$ per $f(x) = -x$. Inoltre $h'(x) = (g(-x))' = g'(-x) \cdot (-x)' = -g'(-x)$.

- Dal esempio precedente segue che le funzioni iperboliche $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sono derivabili con $\sinh'(x) = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$. Similmente segue che $\cosh'(x) = \sinh(x)$. Infine, utilizzando la regola di derivazione per un rapporto segue che anche $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ è derivabile con

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1 - \tanh^2(x) \end{cases}$$

Quindi abbiamo dimostrato che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\boxed{\sinh'(x) = \cosh(x)} \quad \boxed{\cosh'(x) = \sinh(x)} \quad \boxed{\tanh'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1 - \tanh^2(x) \end{cases}}$$

- Sia $a > 0$, allora $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$, $x \in \mathbb{R}$, è derivabile (visto che è la composizione $(g \circ f)(x)$ per $f(x) = x \cdot \ln(a)$ e $g(y) = e^y$) con $(a^x)' = (e^{x \cdot \ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ cioè

$$\boxed{(a^x)' = \ln(a) \cdot (a^x)}$$

- Per funzioni più complesse (cioè composizioni di più di due funzioni) si può iterare la regole della catena iniziando all'esterno. Per esempio, $e^{\cos(3x^2-2x+1)}$ è derivabile con

$$\begin{aligned} \left(e^{\cos(3x^2-2x+1)} \right)' &= e^{\cos(3x^2-2x+1)} \cdot (\cos(3x^2-2x+1))' \\ &= -e^{\cos(3x^2-2x+1)} \cdot \sin(3x^2-2x+1) \cdot (6x-2). \end{aligned}$$

L'ultima regola per la derivazione tratta la

Derivazione delle Funzioni Inverse.¹

Sia $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ continua, biettiva e derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ è derivabile in $y_0 := f(x_0)$ con

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

OSSERVAZIONI. • È importante osservare che mentre f viene derivata in x_0 la derivata di f^{-1} si riferisce al punto $y_0 = f(x_0)$! Questo fatto e anche la formula per $(f^{-1})'(y_0)$ si spiega dal seguente grafico.

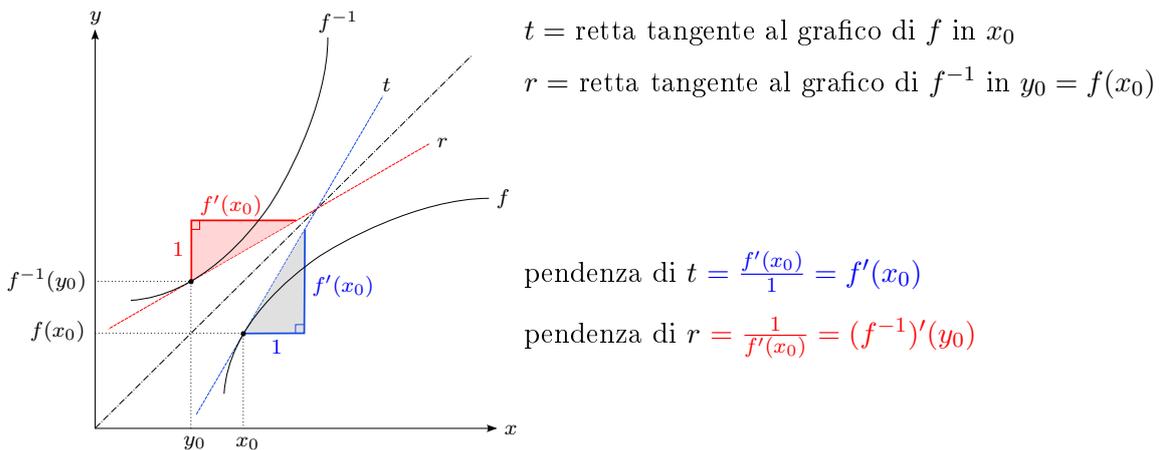


FIGURA 31. Derivata della funzione inversa.

- Si nota che una retta tangente *orizzontale* al grafico di f in x_0 (cioè se $f'(x_0) = 0$) corrisponde a una retta tangente *verticale* al grafico di f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ che significa che f^{-1} non è derivabile in y_0 .
- Non come dimostrazione, ma come modo per ricordare la formula per $(f^{-1})'$, si può utilizzare la regola della catena: Per definizione, $x = f^{-1}(f(x))$ per ogni $x \in (a, b)$. Derivando entrambi i lati di questa equazione otteniamo con $y = f(x)$

$$\begin{aligned} 1 = (x)' &= \left[f^{-1}(f(x)) \right]' \\ &= (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= (f^{-1})'(y) \cdot f'(x) \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

ESEMPLI. • Sia $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ per $0 < a \neq 1$ che è derivabile con $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre abbiamo visto (cfr. pagina 43) che f è invertibile

¹Quando si considerano sia f e f^{-1} conviene, per non confondersi, usare sempre x come variabile per f e y come variabile per f^{-1} .

con $f^{-1}(y) = \log_a(y)$, $y > 0$. Quindi \log_a è derivabile e per $y := f(x) = a^x$ vale

$$\log_a'(y) = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{\ln(a) \cdot \underbrace{a^x}_{=y}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot y}$$

Sostituendo y con x otteniamo così per ogni $x > 0$

$$\boxed{\log_a'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}} \quad \text{in particolare per } a = e \quad \boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

- Per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ la potenza $x^r = e^{r \cdot \ln(x)}$ è derivabile con (usare la regola della catena)

$$(x^r)' = (e^{r \cdot \ln(x)})' = \underbrace{e^{r \cdot \ln(x)}}_{=x^r} \cdot \frac{r}{x} = r \cdot x^{r-1}.$$

Quindi la regola per la derivazione di x^n per $n \in \mathbb{Z}$ (cfr. pagina 51) vale anche per esponenti reali $r \in \mathbb{R}$, cioè per ogni $x > 0$ si ha

$$\boxed{(x^r)' = r \cdot x^{r-1}}$$

- Se f e g sono due funzioni con lo stesso dominio e $f(x) > 0$ per ogni x allora possiamo definire

$$h(x) := f(x)^{g(x)} = \left(e^{\ln(f(x))} \right)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}.$$

Quindi, se f e g sono derivabili anche h è derivabile con

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(f(x)^{g(x)} \right)' = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \\ &= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

- Abbiamo visto (cfr. pagina 45) che $f := \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ è invertibile. Inoltre $f = \sin$ è derivabile con $f'(x) = \sin'(x) = \cos(x)$. Però, $\cos(x)$ si annulla nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ negli estremi $x = \pm \frac{\pi}{2}$ e quindi per ottenere una funzione inversa *derivabile* dobbiamo togliere questi punti dal dominio di $f = \sin$. Allora consideriamo

$$f = \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1)$$

che è invertibile e derivabile con $f'(x) = \cos(x) \neq 0$ per ogni $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Quindi $f^{-1} = \arcsin : (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è derivabile in $y = f(x) = \sin(x)$ con

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Per ottenere una rappresentazione di $\arcsin'(y)$ nella variabile y dobbiamo esprimere ora $\cos(x)$ in funzione di $y = \sin(x)$. Perciò utilizziamo la relazione $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, cioè $\cos(x) = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - y^2}$. Per decidere il segno “+” oppure “-” basta osservare che $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e quindi $\cos(x) > 0$. Quindi dobbiamo scegliere il segno “+” e sostituendo y con x otteniamo finalmente

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1)}$$

- Raggiornando come nel esempio precedente si possono derivare anche le seguenti funzioni inverse:

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x > 1$$

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Estremi Locali e il Teorema di Fermat

Torniamo al problema che abbiamo posto a pagina 46 sull'esistenza e il calcolo del minimo e del massimo di una funzione. Per il Teorema di Weierstraß sappiamo almeno che ogni $f \in C[a, b]$ ammette massimo e minimo, ma rimane il seguente

PROBLEMA. Come si può determinare minimo e massimo di una funzione.

Consideriamo un problema concreto di questo tipo:

ESEMPIO. Dato un cartoncino di dimensione $a \times b$ (con $0 < a \leq b$) costruire un contenitore (senza coperchio) di volume massimo, cfr. Figura 32.

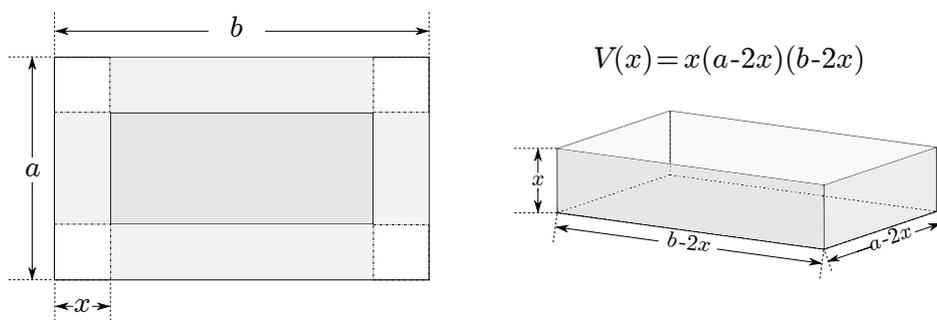


FIGURA 32. Contenitore.

Quindi cerchiamo $x_0 \in [0, \frac{a}{2}]$ tale che $V_{\max} := V(x_0) \geq V(x)$ per ogni $x \in [0, \frac{a}{2}]$. Torneremo a questo problema a pagina 57.

Prima di affrontare problemi di questo tipo generalizziamo il concetto di minimo e massimo per una funzione.

DEFINIZIONE 5.4. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale, allora

- $x_0 \in X$ si dice *punto di minimo locale*, se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$; se x_0 è un punto di minimo locale, $f(x_0)$ si dice *minimo locale*;
- $x_0 \in X$ si dice *punto di massimo locale*, se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$; se x_0 è un punto di massimo locale, $f(x_0)$ si dice *massimo locale*;
- se x_0 è un punto di minimo o di massimo locale, allora si dice *punto di estremo locale* mentre $f(x_0)$ si chiama *estremo locale*.

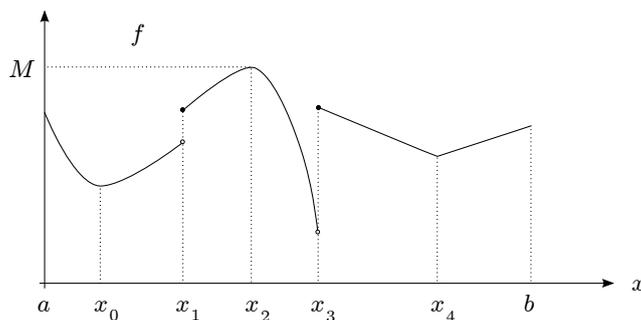


FIGURA 33. Esempi di estremi locali.

ESEMPIO. Consideriamo il grafico in Figura 33. In questo caso abbiamo:

- a , x_2 e x_3 e b sono punti di massimo locale di f ,
- x_0 e x_4 sono punti di minimo locale di f ,
- x_1 non è un punto di estremo locale di f ,
- x_2 è un punto di massimo assoluto di f ,
- $M = f(x_2)$ è il massimo assoluto di f , il minimo assoluto non esiste (soltanto l'estremo inferiore).

Per trovare i punti di estremo locale si usa il

TEOREMA 5.5 (Teorema di Fermat). Sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di estremo locale di $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale. Allora

$$f'(x_0) = \begin{cases} f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0 \\ f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \leq 0 \end{cases}$$

Quindi $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ che implica $f'(x_0) = 0$. □

ESEMPIO. Consideriamo di nuovo il grafico in Figura 34.

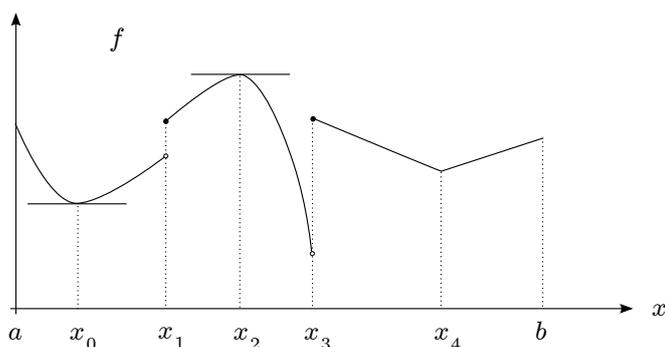


FIGURA 34. Estremi locali e tangenti orizzontali.

Allora la derivata $f'(x)$ si annulla negli estremi locali $x = x_0$ e $x = x_2$ che graficamente corrisponde ad una retta tangente orizzontale.

OSSERVAZIONI.

- Come si vede nel grafico sopra il teorema di Fermat *non* vale negli estremi dell'intervallo $[a, b]$. Cioè se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ è un punto di estremo locale ciò *non* implica (come si vede nel grafico) che $f'(x_0) = 0$.
- Se $f'(x_0) = 0$ allora x_0 si dice *punto critico* oppure *punto stazionario* di f .
- Il Teorema di Fermat fornisce soltanto una condizione necessaria ma *non* sufficiente per estremi locali, cioè *non* ogni punto critico è un punto di estremo locale. Basta considerare $f(x) = x^3$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = 3x^2$ e quindi $x_0 = 0$ è un punto critico ma non è un punto di estremo locale.

Tornando al problema di trovare gli estremi locali di una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo affermare che i *candidati* per punti di estremo locale sono

- i punti in cui f non è derivabile,
- i punti sul “bordo” del dominio X di f ,
- i punti critici all’ “interno” del dominio.

I punti delle prime due classi sono quelli per i quali *non* si può applicare Fermat, la terza classe invece sono quelli che vengono da Fermat.

Consideriamo un altro

ESEMPIO. Definiamo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ x^x & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Per studiare f si rappresenta usando logaritmo ed esponenziale, cioè si scrive

$$x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x \cdot \ln(x)} \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Per procedere calcoliamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Usando la sostituzione

$$-\ln(x) = t \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

e visto che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots \geq \frac{t^2}{2}$ per ogni $t > 0$ segue

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} |x \cdot \ln(x)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{-t}{e^t} \right| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t^2/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0.$$

Quindi dalla continuità dell'esponenziale risulta²

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)} = e^0 = 1 = f(0)$$

implicando che f è continua in $x = 0$. Siccome f , come composizione di funzioni continue, è anche continua in ogni $x \in (0, 1]$ risulta che $f \in C[0, 1]$ e quindi ammette minimo e massimo per il teorema di Weierstraß. Per calcolarli useremo il teorema di Fermat. Allora per $x \in (0, 1)$ la funzione f è derivabile con

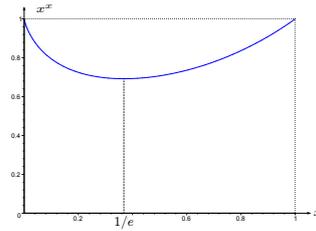
$$f'(x) = (e^{x \cdot \ln(x)})' = (x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x)) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} = (1 + \ln(x)) \cdot x^x = 0 \quad \iff \quad x = \frac{1}{e},$$

cioè $x_0 := \frac{1}{e} \in [0, 1]$ è l'unico punto critico di f . Quindi sappiamo:

- i candidati per i punti di estremo locale sono gli estremi dell'intervallo $a = 0$, $b = 1$ e il punto critico $x_0 = \frac{1}{e}$,
- f ammette $m := \min f$ e $M := \max f$ nell'intervallo $[0, 1]$,
- $f(0) = f(1) = 1$, $f(x_0) = (\frac{1}{e})^{(\frac{1}{e})} = e^{-\frac{1}{e}} < 1$.

Ciò implica $M = \max f = f(0) = f(1) = 1$ e $m = \min f = f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}}$.

²Vedremo in seguito metodi più semplici per calcolare questo limite

FIGURA 35. Grafico di $f(x) = x^x$.

ESEMPIO. Continuiamo lo studio del problema posto a pagina 54: Trovare il valore massimo V_{\max} di $V(x) = x(a - 2x)(b - 2x)$ per $x \in [0, \frac{a}{2}]$. Visto che la funzione V è continua e l'intervallo $[0, \frac{a}{2}]$ è chiuso e limitato questo problema ammette almeno una soluzione per il teorema di Weierstraß. Inoltre, V è derivabile e quindi possiamo utilizzare il teorema di Fermat per trovare il punto di massimo $x_0 \in [0, \frac{a}{2}]$ cioè tale che $V_{\max} = V(x_0)$. Calcolando $V'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab$ otteniamo i punti critici $x_{1,2} = \frac{1}{6}(a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2})$. Visto che $0 < a \leq b$ segue $a^2 - ab \leq 0$ e quindi $a^2 - ab \geq 4a^2 - 4ab$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6} \left(a + b + \sqrt{a^2 - ab + b^2} \right) \geq \frac{1}{6} \left(a + b + \sqrt{4a^2 - 4ab + b^2} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(a + b + \sqrt{(2a - b)^2} \right) = \frac{1}{6} (a + b + |2a - b|) \\ &\geq \frac{1}{6} (a + b + (2a - b)) = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Usando il fatto $V(0) = V(\frac{a}{2}) = 0$ risulta che $x_0 = x_2 = \frac{1}{6}(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})$. Per esempio se scegliamo un cartoncino di formato A 4, cioè di dimensione 21 cm \times 29,7 cm, allora otteniamo $x_0 \approx 4,04$ cm e $V_{\max} = V(x_0) = 1128,5$ cm³, cfr. Figura 36. In particolare si può costruire un contenitore il cui volume è più di un litro.

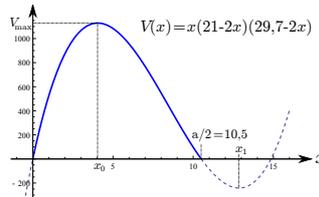


FIGURA 36. Volume contenitore da cartoncino formato A4.

I Teoremi di Rolle e Lagrange

Il seguente risultato stabilisce l'esistenza di punti critici sotto certi ipotesi.

TEOREMA 5.6 (Teorema di Rolle). Sia $f \in C[a, b]$ derivabile in (a, b) . Se $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$ (cfr. Figura 37).

DIMOSTRAZIONE. Per Weierstraß f ammette minimo $m := \min f = f(x_0)$ e massimo $M := \max f = f(x_1)$ in $x_0, x_1 \in [a, b]$. Ora ci sono 2 possibilità:

- 1° Caso: $m = M$, allora f è costante e quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
- 2° Caso: $m < M$. Poiché $f(a) = f(b)$ almeno uno dei punti x_0, x_1 è diverso da a e da b e in questo punto f' si annulla per il teorema di Fermat. \square

Il Teorema di Rolle si può generalizzare togliendo la condizione $f(a) = f(b)$. Così segue il prossimo risultato che è uno dei più importanti di questo corso.

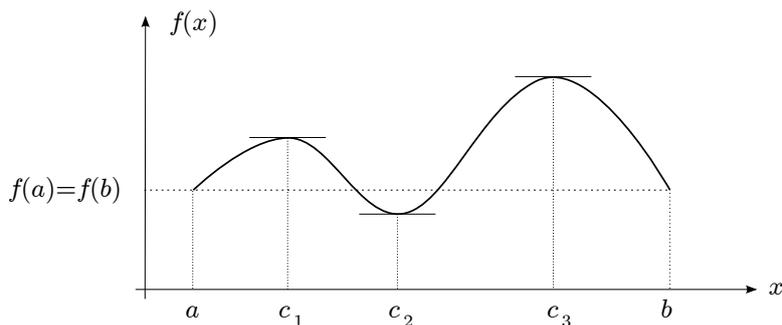


FIGURA 37. Teorema di Rolle: Tre punti con $f'(c_1) = 0 = f'(c_2) = f'(c_3) \iff$ retta tangente orizzontale

TEOREMA 5.7 (Teorema di *Lagrange* (o del valor medio)). Sia $f \in C[a, b]$ derivabile in (a, b) . Allora esiste $c \in (a, b)$ (detto punto di Lagrange) tale che

$$\underbrace{f'(c)}_{\substack{= \text{pendenza della retta} \\ \text{tangente } t \text{ in } (c, f(c))}} = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\substack{= \text{pendenza della retta} \\ \text{secante } s \text{ attraverso} \\ (a, f(a)) \text{ e } (b, f(b))}}$$

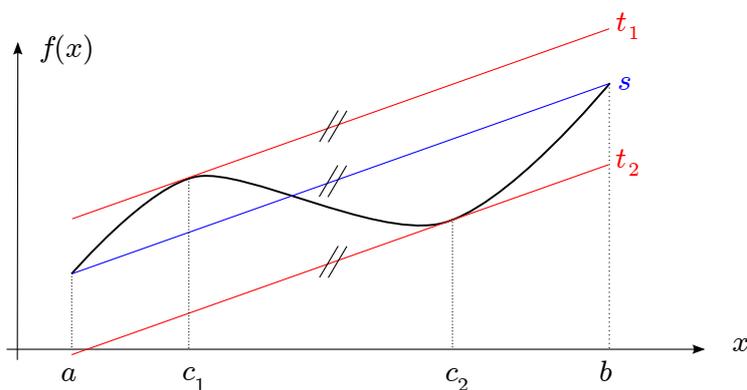


FIGURA 38. Teorema di Lagrange: Due punti di Lagrange c_1 e c_2 .

Quindi il teorema stabilisce che esiste un punto c tale che la retta tangente t al grafico di f in $(c, f(c))$ e la retta secante attraverso $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ sono parallele.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema di Rolle alla funzione $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a). \quad \square$$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Il Teorema di Lagrange ha molte applicazioni per le quali, però, viene usato nel seguente modo: Se $f \in C[a, b]$ è derivabile in (a, b) allora per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$ esiste c tra x_1 e x_2 tale che

$$\boxed{f(x_2) = f(x_1) + f'(c) \cdot (x_2 - x_1)}$$

Per ottenere questa versione del teorema basta sostituire a, b con x_1, x_2 e poi risolvere l'equazione per $f(x_2)$.

Test di Monotonia. Se $f \in C[a, b]$ è derivabile in (a, b) allora

- f è crescente $\iff f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;
- f è decrescente $\iff f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;
- $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b) \implies f$ è strettamente crescente;
- $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b) \implies f$ è strettamente decrescente.

Prima di dimostrare il test osserviamo che nel punto 3 e 4 *non* vale l'equivalenza, basta considerare $f(x) = x^3$ per $x \in \mathbb{R}$ che è strettamente crescente nonostante che $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Dimosteremo soltanto il primo punto. “ \implies ”: Se f è crescente, allora

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{\geq f(x)}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0.$$

“ \impliedby ”: Sia $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora per $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq f(x_1),$$

cioè f è crescente. □

ESEMPIO. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - 3x^2 + 6x - 3$. Allora

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 1) + 3 = 3(x - 1)^2 + 3 > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e quindi f è strettamente crescente e di conseguenza iniettiva. Inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e quindi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è anche suriettiva e di conseguenza invertibile. Visto che $f'(x) \neq 0$ dal risultato sulla derivabilità della funzione inversa (cfr. pagina 52) segue che $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile con $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ dove $y_0 = f(x_0)$. Per esempio, per $y_0 = -3$ vale $y_0 = f(0)$, cioè $x_0 = 0$ e quindi

$$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}.$$

Dal test di monotonia segue anche facilmente la seguente

PROPOSIZIONE 5.8. Se $f, g \in C[a, b]$ sono derivabili in (a, b) e

$$f(a) \geq g(a) \quad e \quad f'(x) \geq g'(x) \quad \text{per ogni } x \in (a, b)$$

allora $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $h := f - g$. Allora $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ e quindi h è crescente con $h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$. Ciò implica $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, quindi $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. □

Criterio per Estremi Locali. Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto critico di f (cioè $f'(x_0) = 0$). Allora x_0 è un punto di

- massimo locale, se $f'(x)$ cambia in x_0 segno da “+” a “-”;
- minimo locale, se $f'(x)$ cambia in x_0 segno da “-” a “+”;

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione segue dal test di monotonia: se vale la prima condizione, allora f poco prima di x_0 è crescente mentre poco dopo è decrescente e quindi x_0 è un punto di massimo locale. Similmente segue la seconda affermazione, cfr. Figura 39. □

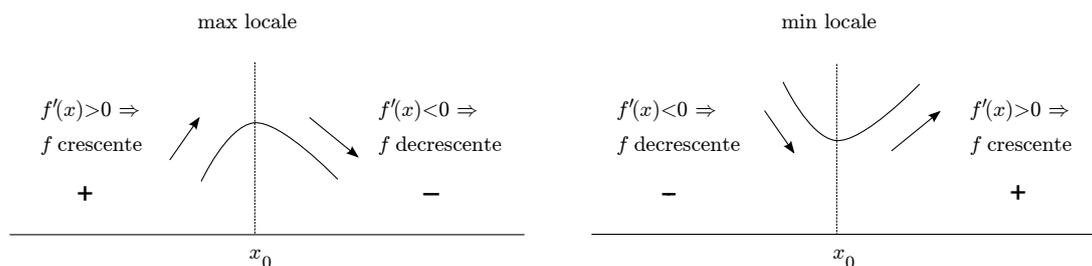


FIGURA 39. Criterio per estremi locali.

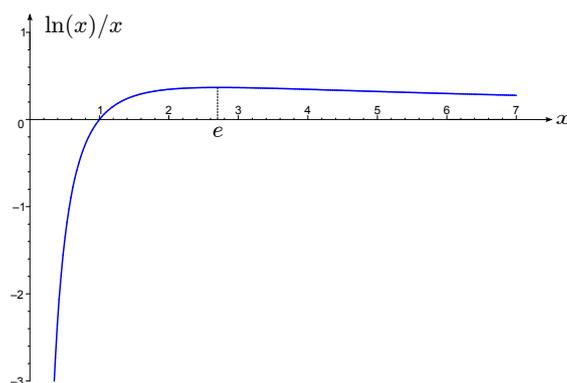
ESEMPIO. Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\ln(x)}{x}$. Allora f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Quindi $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$, cioè $x_0 = e$ è l'unico punto critico di f . Inoltre,

- $\ln(x) < 1$ per $x \in (0, e) \Rightarrow f'(x)$ è positiva prima di $x_0 = e$,
- $\ln(x) > 1$ per $x \in (e, +\infty) \Rightarrow f'(x)$ è negativa dopo $x_0 = e$

cioè $f'(x)$ cambia in $x_0 = e$ segno da “+” a “-” $\Rightarrow x_0 = e$ è un punto di massimo locale.

FIGURA 40. Grafico di $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Caratterizzazione di Funzioni Costanti. Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e derivabile, allora

$$f \text{ è costante} \iff f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

DIMOSTRAZIONE. “ \Rightarrow ” Questa implicazione è banale visto che per f è costante il rapporto incrementale è 0 e quindi anche ammette limite 0. “ \Leftarrow ” Usando il test di monotonia dall’ipotesi

$$f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a, b) \begin{cases} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ è crescente, inoltre} \\ \Rightarrow f'(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

□

Questa caratterizzazione sembra banale ma tuttavia è utile per dimostrare risultati che non sono così ovvi.

ESEMPIO. Definiamo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Allora f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

A questo punto, però, *non* possiamo concludere che f è costante visto che il dominio $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *non* è un intervallo. Comunque $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è l'unione di due intervalli e quindi f è costante sia sul intervallo $(-\infty, 0)$ che su $(0, +\infty)$. Quindi esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = c_1 \text{ per ogni } x > 0 \quad \text{e} \quad f(x) = c_2 \text{ per ogni } x < 0.$$

Per calcolare le costanti c_1, c_2 (che, come vedremo sono diversi) basta scegliere un valore opportuno $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ poiché in ogni caso $f(x_1) = c_1$ e $f(x_2) = c_2$. Per la funzione f possiamo per esempio scegliere $x = 1$ e $x_2 = -1$ e così risulta

$$\begin{aligned} \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= f(x) = \\ &= \begin{cases} f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} & \text{per ogni } x > 0, \\ f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = 2 \cdot \frac{-\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} & \text{per ogni } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Criterio per Funzioni Lipschitziane.

DEFINIZIONE 5.9. Se per $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esiste una costante $L \geq 0$ (detta *costante di Lipschitz*) tale che

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L \cdot |x_2 - x_1| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X$$

allora f si dice *funzione lipschitziana* con costante L .

OSSERVAZIONE. È semplice verificare che ogni funzione lipschitziana è continua mentre il contrario non vale. Ciò si vede riscrivendo la relazione nella definizione come

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq L \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2,$$

che in pratica significa che la pendenza di qualsiasi retta secante attraverso i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ha (in modulo) al massimo pendenza L . Se ora consideriamo il grafico di $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ e scegliamo $x_1 = 0$ e $x_2 \in (0, 1]$ si vede che la pendenza della retta secante tende per $x_2 \rightarrow 0^+$ a $+\infty$ e quindi f *non* è lipschitziana.

Dal Teorema di Lagrange segue il seguente Criterio.

PROPOSIZIONE 5.10. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora f è lipschitziana con costante L . In particolare ogni $f \in C^1[a, b]$ è lipschitziana.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$. Allora per Lagrange esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(c)| \leq L \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X$$

Se $f \in C^1[a, b]$, allora $f' \in C[a, b]$ è limitata per il teorema di Weierstraß. \square

Le Regole di de l'Hospital

Partiamo con il seguente importante

PROBLEMA. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

che al limite rappresenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Per esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Nonostante i due limiti precedenti si possano calcolare anche direttamente, le seguenti regole ne semplificano molto lo svolgimento. Non presentiamo la dimostrazione che comunque si basa sempre sul Teorema di Lagrange.

TEOREMA 5.11 (Regole di de l'Hospital). Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ oppure $= \pm\infty$,
- f, g sono derivabili con $g'(x) \neq 0$ per ogni x vicino ad a ,
- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: l \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste.

Allora anche

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

La stessa conclusione vale anche per limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow b^-}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0}$ per $x_0 \in (a, b)$.

Prima di svolgere alcuni esempi facciamo le seguenti

OSSERVAZIONE. • Se $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste *non* si può dedurre che anche $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste. Cioè l'Hospital offre soltanto una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di un limite. Per verificare ciò consideriamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\substack{\text{limitato} \\ \rightarrow +\infty}} = 1$$

che quindi converge mentre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{1}$$

non esiste.

- L'Hospital *non* si deve applicare a forme determinate. Per esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{2+x} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)'}{(2+x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1.$$

Consideriamo ora alcuni esempi in cui il simbolo " $\stackrel{H}{=}$ " significa che abbiamo applicato l'Hospital, cioè derivato numeratore e denominatore.

ESEMPI. • Sia $\alpha > 0$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \left(= \frac{+\infty}{+\infty} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0.$$

- Usando piccoli trucchi si possono anche studiare limiti che all'inizio non sono della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Per esempio, per $\alpha > 0$ vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \ln(x) = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} \left(= \frac{-\infty}{+\infty} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

- Può succedere anche che dopo un'applicazione di l'Hospital si ottiene nuovamente una forma indeterminata ammessa. In questi casi si può provare ad applicare l'Hospital più volte. Per esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} \left(= \frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} \left(= \frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} \left(= \frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}.$$

Qui la seconda e terza applicazione di l'Hospital si potrebbe evitare ricordando i limiti notevoli (1) e (2) a pagina 38. Però confrontando i procedimenti si vede che le regole di l'Hospital hanno semplificato notevolmente il calcolo di questi limiti.

- Per calcolare limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$ si procede come segue:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla continuità della funzione esponenziale. Per dare un esempio concreto consideriamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{\sin(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{\sin(x)}}.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{\sin(x)} \left(= \frac{\ln(0 + e^0)}{\sin(0)} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+e^x} \cdot (1 + e^x)}{\cos(x)} = 2$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{\sin(x)}} = e^2$$

Approssimazione Lineare di Funzioni

Torniamo ora al problema iniziale posto a pagina 47: Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in (a, b)$, trovare

- la retta tangente t al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, e
- un'approssimazione lineare $g(x) = \alpha \cdot x + \beta$ (cioè g è un polinomio di grado ≤ 1) per $f(x)$ per x vicino a x_0 .

Abbiamo risolto (i): Se f è derivabile in x_0 , allora la retta tangente t è data dall'equazione

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Quindi la retta tangente definisce un polinomio di grado ≤ 1 e di conseguenza si può avere l'idea di usare proprio $g(x) := t(x)$ come approssimazione lineare. Come vedremo in seguito, questa scelta è infatti in un certo senso la migliore possibile. Per verificare ciò scriviamo

$$f(x) = t(x) + r(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{approssimazione lineare}} + \underbrace{r(x)}_{\text{resto (o errore)}}$$

cioè $r(x) = f(x) - t(x)$, cfr. Figura 41.

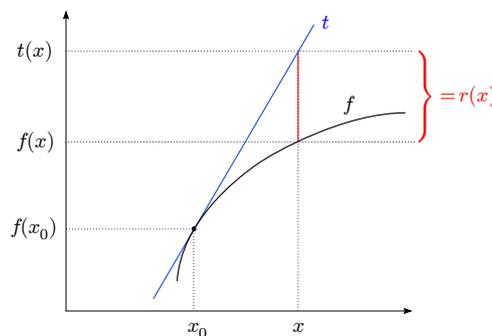


FIGURA 41. Il resto $r(x)$.

Studiamo le proprietà di $r(x)$:

- $r(x_0) = 0$ cioè nel punto x_0 l'approssimazione dà il valore esatto,

- vale

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{\rightarrow f'(x_0)}} - f'(x_0) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Cioè $r(x)$ tende a 0 più rapidamente di $x - x_0$ per $x \rightarrow x_0$.

Per confrontare meglio il comportamento di due funzioni facciamo la seguente

DEFINIZIONE 5.12. Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

allora si dice che f è *o-piccolo di g* per $x \rightarrow x_0$ e in questo caso si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ o più brevemente $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$.

OSSERVAZIONI. • $o(\cdot)$ si chiama *simbolo di Landau*.

- $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ significa per
 - *infinitesimi* che $f(x) \rightarrow 0$ più rapidamente che $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$;
 - *infiniti* che $f(x) \rightarrow \pm\infty$ più lentamente che $g(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow x_0$.

ESEMPLI. • $\ln(x) = o(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ poiché $\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

- $1 - \cos(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ poiché

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1 - \cos(x)}{\underbrace{x^2}_{\rightarrow \frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

- $x = o(x^2)$ per $x \rightarrow \pm\infty$ mentre $x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.
- $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0 \iff f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$.
- Tornando al problema di approssimazione lineare possiamo ora dire che $r(x) = o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$.

Con gli *o-piccoli* si possono caratterizzare le funzioni derivabili.

PROPOSIZIONE 5.13. Per una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(a) f è derivabile in x_0 .

(b) Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$.

In questo caso $A = f'(x_0)$.

Quindi questa proposizione stabilisce che l'approssimazione lineare $t(x)$ data dalla retta tangente t è l'unica che lascia un resto $r(x)$ che per $x \rightarrow x_0$ tende a 0 più rapidamente che la distanza $x - x_0$ tra x e x_0 . Cioè per ogni altra scelta di approssimazione con un polinomio di grado ≤ 1 il resto tende a zero più lentamente. In questo senso $t(x)$ è la migliore approssimazione lineare possibile di $f(x)$ per x vicino a x_0 .

Consideriamo alcuni

ESEMPLI. • Se $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica

$$e^x = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = e^0 + e^0 \cdot x + o(x), \text{ cioè}$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0}$$

- Se $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica $\sin(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = \sin(0) + \cos(0) \cdot x + o(x)$, cioè

$$\boxed{\sin(x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0}$$

- Se $f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica $\ln(1 + x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = \ln(1) + \frac{1}{1+0} \cdot x + o(x)$, cioè

$$\boxed{\ln(1 + x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0}$$

La Formula di Taylor

La Formula di Taylor

Abbiamo quindi risolto anche il problema dell'approssimazione lineare, cioè di approssimare il valore $f(x)$ di una funzione (possibilmente molto complicata) vicino al punto x_0 con un polinomio $t(x)$ (cioè con una funzione molto semplice) di grado ≤ 1 .

A questo punto si può avere l'idea di limitare il grado dell'approssimazione non a 1 ma a un numero $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi. Cioè si può generalizzare il problema dell'approssimazione lineare nel seguente modo:

PROBLEMA. Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ e $n \in \mathbb{N}$, approssimare $f(x)$ per x vicino a x_0 con un polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$

Per $n = 1$ abbiamo visto che $T_1(x) = t(x)$ è la migliore scelta possibile. Per risolvere il problema per $n \in \mathbb{N}$ dobbiamo prima introdurre le

Derivate Successive.

DEFINIZIONE 5.14. Se f è derivabile e tale che f' è nuovamente derivabile, allora possiamo definire

$$(f')' =: f'' = \text{derivata seconda} =: D^2 f =: \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Se si può continuare in questa maniera n volte otteniamo

$$f^{(n)} = \text{derivata } n\text{-esima} =: D^n f =: \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Inoltre, se I è un intervallo e $n \in \mathbb{N}$ definiamo $C^0(I) := C(I)$ (e $f^{(0)} := f$) e per $n \geq 1$

$$C^n(I) := \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} f \text{ è derivabile } n\text{-volte} \\ \text{e } f^{(n)} \text{ è continua} \end{array} \right. \right\}$$

Se $f \in C^n(I)$ si dice anche che f è *derivabile n -volte con continuità* (qui la continuità si riferisce alla derivata n -esima $f^{(n)}$ e non a f).

ESEMPIO. Se $f(x) = \sin(x)$, allora f è derivabile con $f'(x) = \cos(x)$ che è anche derivabile. Quindi otteniamo $f''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$ che è nuovamente derivabile. Così otteniamo $f'''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$ che è sempre derivabile. Quindi esiste anche la derivata quarta che indichiamo con il simbolo $f^{(4)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x) = f(x)$. Quindi dopo 4 derivazioni si ritorna alla funzione originale.

Dopo questo intermezzo sulle derivate successive possiamo tornare al problema dell'approssimazione di $f(x)$ per x vicino a x_0 attraverso un polinomio di grado $\leq n$. Per ottenere un'idea come si può risolvere questo problema consideriamo i casi $n = 0$ e $n = 1$.

- Per $n = 0$ la migliore approssimazione con un polinomio di grado ≤ 0 (cioè con una costante) è ovviamente $T_0(x) := f(x_0) = T_0(x_0)$, cioè T_0 e f hanno in x_0 il valore in comune:

$$T_0(x_0) = f(x_0).$$

- Per $n = 1$ il problema diventa quello dell'approssimazione lineare che abbiamo risolto precedentemente: Se f è derivabile in x_0 allora la migliore approssimazione ci dà $t(x) =: T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Quindi $T_1(x_0) = f(x_0)$ e $T_1'(x_0) = f'(x_0)$ cioè T_1 e f hanno in x_0 il valore e derivata prima in comune:

$$T_1(x_0) = f(x_0),$$

$$T_1'(x_0) = f'(x_0).$$

Quindi per $n \geq 2$ supponiamo che f sia n -volte derivabile e poi cerchiamo un polinomio T_n che con f ha in x_0 valore e tutte le derivate fino alla n -esima in comune:

$$\left. \begin{array}{l} T_n(x_0) = f(x_0), \\ T'_n(x_0) = f'(x_0), \\ \vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \end{array} \right\} \iff : \quad f \text{ e } T_n \text{ hanno contatto di ordine } n \text{ in } x_0$$

Visto che questo sistema consiste da $n + 1$ equazione e il polinomio T_n da determinare ha $n + 1$ coefficienti $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ come incognite, il seguente risultato è plausibile.

PROPOSIZIONE 5.15. *Se $f \in C^n(a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$ allora esiste un'unico polinomio T_n di grado $\leq n$ che ha un contatto di ordine n in x_0 con f . Questo polinomio si chiama polinomio di Taylor di ordine n con centro x_0 generato da f ed è dato da*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Infine, se $x_0 = 0$, allora T_n viene anche chiamato polinomio di **Maclaurin**.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo soltanto che per $n = 3$ il polinomio T_3 definito sopra ha contatto di ordine 3 con $f \in C^3(a, b)$ in $x_0 \in (a, b)$. Infatti

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 &\Rightarrow T_3(x_0) &= f(x_0), \\ T'_3(x) &= f'(x_0) + f''(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 &\Rightarrow T'_3(x_0) &= f'(x_0), \\ T''_3(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0) \cdot (x - x_0) &\Rightarrow T''_3(x_0) &= f''(x_0), \\ T'''_3(x) &= f'''(x_0) &\Rightarrow T'''_3(x_0) &= f'''(x_0). \end{aligned}$$

□

ESEMPIO. (Cfr. Figura 42) Sia $f(x) = e^x$. Allora $f \in C^n(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ per ogni $0 \leq k \leq n$. Quindi risulta per $x_0 = 0$ che $f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$ per ogni $0 \leq k \leq n$ e di conseguenza

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

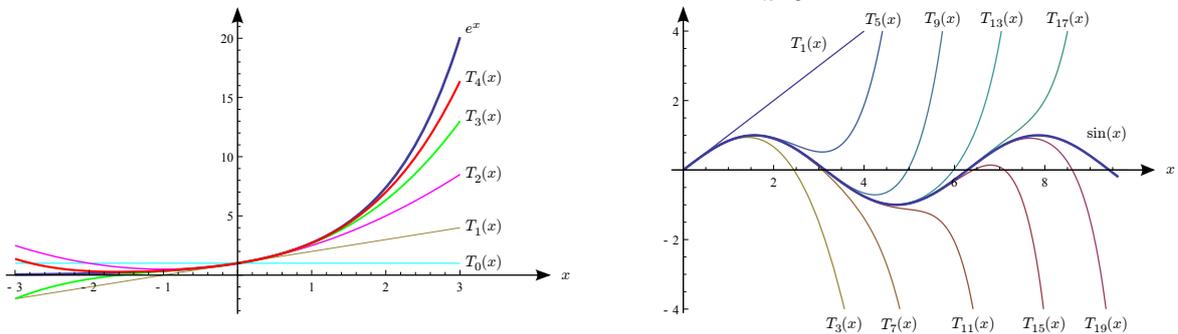


FIGURA 42. I primi polinomi di Maclaurin di $f(x) = e^x$ e $f(x) = \sin(x)$ (cfr. p. 67).

Prima di considerare altri esempi ci poniamo il seguente

PROBLEMA. Quanto vale il resto (o errore) dovuto all'approssimazione con il polinomio di Taylor, cioè

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) = ?$$

Consideriamo prima i casi che abbiamo già studiati.

$n = 0$: Per il Teorema di Lagrange esiste c tra x e x_0 tale che

$$\begin{aligned} R_0(x) &= f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0) \\ &= o(1) = o((x - x_0)^0). \end{aligned}$$

$n = 1$: Visto che $T_1(x) = t(x) =$ approssimazione lineare (cfr. pagina 63) segue

$$R_1(x) = r(x) = o((x - x_0)^1).$$

Nel caso generale $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente generalizzazione di queste rappresentazioni di $R_n(x)$.

TEOREMA 5.16 (*Formula di Taylor*). Sia $f \in C^{n+1}(a, b)$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Allora per $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ vale

•

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad (\text{Resto di Peano})$$

• esiste c tra x e x_0 tale che

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad (\text{Resto di Lagrange})$$

OSSERVAZIONI. • Per la formula di Taylor con il resto di Peano basta che $f \in C^n(a, b)$.

• La Formula di Taylor con il

- Resto di Peano è un'affermazione *qualitativa*, cioè afferma soltanto con che velocità il resto $R_n(x)$ tende a 0 per $x \rightarrow x_0$;
- Resto di Lagrange è un'affermazione *quantitativa*, che permette anche valutare la grandezza del resto (si noti tuttavia che c non è noto).

• Se per un polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ vale

$$f(x) - p(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

allora $p(x) = T_n(x)$. In altre parole $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che lascia un resto che tende più rapidamente a 0 per $x \rightarrow x_0$ che $(x - x_0)^n$. In questo senso la scelta di $T_n(x)$ come approssimazione di $f(x)$ per x vicino a x_0 è ottima. Questa osservazione ci permetterà in seguito di calcolare $T_n(x)$ senza calcolare alcuna derivata.

• Una rappresentazione esplicita del tipo $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$ si chiama *sviluppo di Taylor di f di ordine n e centro x_0* .

Calcoliamo appunto alcuni sviluppi di Taylor.

ESEMPI. • Dall'esempio precedente segue per $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$ che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Per esempio $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

• Abbiamo già visto nell'esempio su pagina 65 che per $f(x) = \sin(x)$ vale $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$ e $f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x)$. Quindi $f \in C^n(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$f^{(2k)}(0) = \pm \sin(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k.$$

Ciò implica

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. Siccome per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $f^{(2n+2)}(0) = 0$ segue $T_{2n+2}(x) = T_{2n+1}(x)$ e di conseguenza

$$f(x) = \underbrace{T_{2n+2}(x)}_{=T_{2n+1}(x)} + o(x^{2n+2}) = T_{2n+1}(x) + o(x^{2n+2}).$$

Così risulta lo sviluppo

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0.}$$

Per esempio per $n = 1$ vale

$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \overbrace{\frac{f^{(4)}(0)}{4!}}{=0} \cdot x^4 = T_3(x) \quad \text{e quindi}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Lo sviluppo precedente è migliore dello sviluppo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ in quanto per $x \rightarrow 0$ l'espressione x^4 tende più rapidamente a zero che x^3 .

Questo guadagno di un grado nel $o(\cdot)$ si ottiene anche per altri sviluppi di Maclaurin (cioè per $x_0 = 0$) di funzioni pari oppure dispari in quanto

- tutte le derivate di ordine pari di una funzione dispari in $x_0 = 0$ si annullano (come sopra per il sin),
- tutte le derivate di ordine dispari di una funzione pari in $x_0 = 0$ si annullano (per esempio per il cos).

Di conseguenza in uno sviluppo di Maclaurin di una

- funzione pari compariranno soltanto termini x^k con k pari, mentre per
- funzione dispari compariranno soltanto termini x^k con k dispari.

Nella stessa maniera seguono i seguenti sviluppi.

- Come già sopra indicato vale per $f(x) = \cos(x)$ (= funzione pari) e $x_0 = 0$ che $T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$. Quindi

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \rightarrow 0.}$$

Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$.

- Per le funzioni iperboliche \sinh (= dispari) e \cosh (= pari) valgono i seguenti sviluppi che sono molto simili a quelli delle funzioni circolari sin e cos:

$$\boxed{\sinh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0,}$$

$$\boxed{\cosh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \rightarrow 0.}$$

Per esempio $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ e $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$.

- Per $f(x) = \arctan(x)$ (= funzione dispari) e $x_0 = 0$ vale $T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$.
Quindi

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$ per $x \rightarrow 0$.

- Per $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ (= funzione dispari) e $x_0 = 0$ vale $T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$.
Quindi

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\operatorname{artanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$ per $x \rightarrow 0$.

- Scegliendo $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(1+x)$ e $x_0 = 0$ si ottiene

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

- Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ definiamo il *coefficiente binomiale generalizzato*

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per esempio $\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$. Allora per $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^\alpha$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_0 = 0$ si ottiene

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \cdot x^k + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

che è una generalizzazione della formula del binomio di Newton (cfr. pagina 6) per esponenti $\alpha \in \mathbb{R}$. Per esempio, scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $n = 2$ otteniamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} \cdot x^0 + \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot x^1 + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La Formula di Taylor è molto importante come si vede anche dalle seguenti

Applicazioni della Formula di Taylor

Criterio per Estremi Locali. Sia $f \in C^n(a, b)$ per $n \geq 2$ e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Se n è pari, allora f ammette in x_0 un

- minimo locale, se $f^{(n)}(x_0) > 0$,
- massimo locale, se $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Se n è dispari, allora x_0 non è un punto di estremo locale di f .

Il caso più importante è $n = 2$: Se $f'(x_0) = 0$ e

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo locale,
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di massimo locale.

CENNO DELLA DIMOSTRAZIONE. Per La Formula di Taylor con Resto di Peano vale

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n}_{=0} + \underbrace{o((x - x_0)^n)}_{\text{="piccolo errore" trascurabile}}$$

$$\approx f(x_0) + c \cdot (x - x_0)^n \quad \text{per } x \text{ vicino a } x_0$$

con $c = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Quindi anziché studiare se x_0 è un punto di estremo locale di $f(x)$ basta considerare la stessa questione per il polinomio $p(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)^n$. A questo punto ci sono tre casi, cfr. Figura 43.

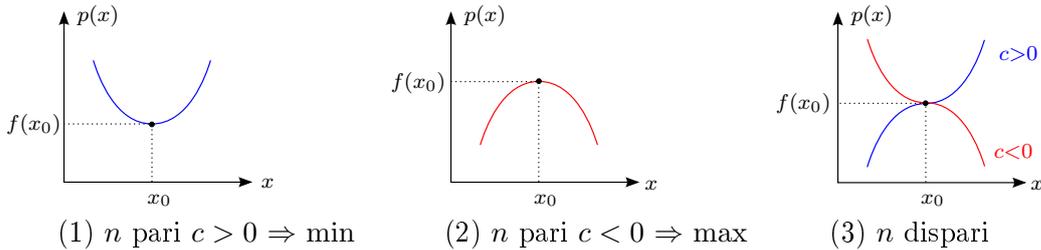


FIGURA 43. Criterio per estremi locali.

□

- (1) n pari e $c > 0$ ($\iff f^n(x_0) > 0$): Allora x_0 è un punto di minimo locale;
 (2) n pari e $c < 0$ ($\iff f^n(x_0) < 0$): Allora x_0 è un punto di massimo locale;
 (3) n dispari: Allora x_0 non è un punto di estremo locale.

ESEMPLI. • Consideriamo $f(x) = x^2$. Allora $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2 \Rightarrow f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$ (cioè $n = 2 = \text{pari}$) $\Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di minimo di f .

- Consideriamo $f(x) = x^3$. Allora $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ e $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'(0) = 0 = f''(0)$ e $f'''(0) \neq 0$ (cioè $n = 3 = \text{dispari}$) $\Rightarrow x_0 = 0$ non è un punto di estremo di f .

- Sia $f(x) = x \cdot \sin(x) - \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = x \cdot \cos(x) + 1 \cdot \sin(x) + \sin(2x) \cdot 2$ e quindi $f'(0) = 0$, cioè $x_0 = 0$ è un punto critico di f . Per decidere la sua natura calcoliamo anche le derivate successive in $x_0 = 0$:

$$f''(x) = x \cdot (-\sin(x)) + 1 \cdot \cos(x) + \cos(x) + 2 \cdot \cos(2x) \cdot 2 \Rightarrow f''(0) = 0 + 1 + 1 + 2 \cdot 2 = 6 > 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ è un punto di minimo locale di } f.$$

Calcolo dei Limiti. Generalizziamo prima il concetto di asintoticità dalle successioni alle funzioni.

DEFINIZIONE 5.17. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, allora si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono *asintotiche* e si scrive $f(x) \sim g(x)$ (o anche solo $f \sim g$) per $x \rightarrow x_0$.

OSSERVAZIONE. Se $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso comportamento asintotico, cioè $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0 \iff g(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0$.

Come per le successioni anche per le funzioni vale il

TEOREMA 5.18 (Principio di Sostituzione). Se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$ per $x \rightarrow x_0$, allora

$$f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2 \quad \text{per } x \rightarrow x_0, \quad \text{in particolare} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot g_1(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \cdot g_2(x) = l$$

$$\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2} \quad \text{per } x \rightarrow x_0, \quad \text{in particolare} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = l$$

Quindi in *prodotti e rapporti* si possono sostituire espressioni con altre espressioni asintotiche senza cambiare il comportamento asintotico, in particolare senza cambiare il limite se esiste.

ESEMPLI. • $\sin(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$ poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

• $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow 0$ poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Quindi per il principio di sostituzione vale

$$\frac{\sin(x) \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)} \sim \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Come già per le successioni, il principio di sostituzione **!!! NON !!!** vale per somme, differenze o potenze, cioè se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$ per $x \rightarrow x_0$ allora

- $\nrightarrow f_1(x) \pm g_1(x) \sim f_2(x) \pm g_2(x)$ per $x \rightarrow x_0$,
- $\nrightarrow (f_1(x))^{g_1(x)} \sim (f_2(x))^{g_2(x)}$ per $x \rightarrow x_0$.

Quindi come già detto in prodotti e in rapporti si possono sostituire espressioni (complicate) con altre espressioni asintotiche (più semplici) senza cambiare l'esistenza e il valore del limite. Come vedremo ciò permette di facilitare il calcolo dei limiti. A questo punto, però, si pone il seguente

PROBLEMA. Come si può trovare per una funzione f_1 (possibilmente complicata) una funzione f_2 (semplice) tale che $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \rightarrow x_0$?

Per risolvere questo problema usiamo la seguente

PROPOSIZIONE 5.19. $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \rightarrow x_0 \iff f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

ESEMPLI. • $\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0 \iff \ln(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$.

- $f(x) = a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$ (con $a_n \neq 0$) $\iff f(x) \sim a_n(x-x_0)^n$ per $x \rightarrow x_0$.

Come nel secondo esempio l'idea è ora di rappresentare $f_1(x)$ e $g_1(x)$ usando la Formula di Taylor con resto di Peano in maniera tale che f_2 e g_2 diventeranno *monomi* $\neq 0$.

Più precisamente dal principio di sostituzione e dalla proposizione precedente segue per $x \rightarrow x_0$

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= a_n \cdot (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \\ g_1(x) &= b_m \cdot (x-x_0)^m + o((x-x_0)^m) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) \cdot g_1(x) \sim a_n b_m \cdot (x-x_0)^{n+m} \\ \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{a_n}{b_m} \cdot (x-x_0)^{n-m} \end{cases}$$

Quindi nel caso del rapporto segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_n}{b_m} \cdot (x-x_0)^{n-m} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n > m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m, \\ \pm\infty & \text{se } n < m. \end{cases} \end{aligned}$$

Riassumendo, per studiare il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con Taylor si procede così:

- (1) Si cerca lo sviluppo del *denominatore* del tipo $g(x) = b \cdot (x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)$ con $b \neq 0$, cioè $b \cdot (x - x_0)^m$ è il primo polinomio di Taylor di g che non è identicamente $= 0$.
- (2) Si sviluppa il *numeratore* f fino allo stesso ordine m . Non è necessario superare oltre all'ordine m per ottenere un polinomio di Taylor del numeratore $\neq 0$ poiché se $f(x) = 0 + o((x - x_0)^m)$ il limite del rapporto è in ogni caso $= 0$.

Consideriamo alcuni

ESEMPI. • Studiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)}.$$

Come dalla regola generale iniziamo sempre con il denominatore. Qui non è necessario svilupparlo con Taylor, è invece più semplice semplificarlo usando il principio di sostituzione: $\sin(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$ e quindi

$$\frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)} \sim \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

Ora visto che il denominatore è di 3° ordine dobbiamo quindi sviluppare anche il numeratore fino al 3° ordine:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \Rightarrow \quad \sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Così risulta

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)} = -\frac{1}{6}.$$

• Studiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \ln((1+x)^2)}{\cos(\frac{x}{2}) - 1}.$$

Iniziamo sempre con il denominatore: Sappiamo che per $t \rightarrow 0$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \xrightarrow{(t=\frac{x}{2})} \quad \cos(\frac{x}{2}) - 1 = -\frac{(\frac{x}{2})^2}{2} + o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = -\frac{x^2}{8} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{8} \quad (x = 2t \rightarrow 0)$$

Visto che il denominatore è di 2° ordine dobbiamo ora sviluppare anche il numeratore al 2° ordine. Perciò notiamo prima che $\ln((1+x)^2) = 2 \ln(1+x)$, quindi

$$\left. \begin{aligned} \sin(t) = t + o(t^2) \quad (t \rightarrow 0) & \quad \xrightarrow{(t=2x)} \quad \sin(2x) = 2x + o((2x)^2) = 2x + o(x^2) \\ 2 \cdot \ln(1+x) = 2 \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) & = 2x - x^2 + o(x^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\sin(2x) - \ln((1+x)^2) = 2x + o(x^2) - (2x - x^2 + o(x^2)) = x^2 + o(x^2) \sim x^2 \quad (x \rightarrow 0)$$

Così risulta

$$\frac{\sin(2x) - \ln((1+x)^2)}{\cos(\frac{x}{2}) - 1} \sim \frac{x^2}{-\frac{x^2}{8}} = -8$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \ln((1+x)^2)}{\cos(\frac{x}{2}) - 1} = -8.$$

Abbiamo già visto in questi esempi semplici che per procedere servono delle regole per il calcolo con gli $o(\cdot)$ come per esempio $o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$ oppure $o(4x^2) = o(x^2)$. Per calcolare limiti più complicati servono ulteriori

Regole per il Calcolo con gli $o(\cdot)$. Per $x \rightarrow x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ vale

- $\alpha \cdot o(f) = o(f)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per esempio $2 o(x^n) = o(x^n)$;
- $o(\alpha \cdot f) = o(f)$ per ogni $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, per esempio $o(4x^n) = o(x^n)$;
- $o(f) \pm o(f) = o(f)$, per esempio $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$;
- $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$, per esempio $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$;
- $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$, per esempio $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$;
- $o(o(f)) = o(f)$, per esempio $o(o(x^n)) = o(x^n)$;
- $o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^n)$ se $m \geq n$, per esempio $o(x^4) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.
- $(x - x_0)^m = o((x - x_0)^n)$ se $m > n$, per esempio $x^5 = o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$.
- se $f \sim g$ allora $o(f) = o(g)$, p.e. $\sin(x) \sim x$ e quindi $o(\sin(x)) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$;
- se $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ e $\varphi(t) \rightarrow x_0$ per $t \rightarrow t_0$ allora $f(\varphi(t)) \sim g(\varphi(t))$ per $t \rightarrow t_0$, p.e. $\ln(1+x) \sim x$ ($x \rightarrow 0$) e $\sin(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) allora $\ln(1+\sin(t)) \sim \sin(t) \sim t$ ($t \rightarrow 0$).

Qui, come sempre, con $o(f)$ si deve immaginare la *qualità* di un resto di tendere più velocemente a 0 di f e *non* come una quantità. In particolare in generale si ha

- $o(f) = o(g) \not\Rightarrow o(g) = o(f)$,
- $f + o(h) = g + o(h) \not\Rightarrow f = g$,
- $o(f) - o(f) \neq 0$.

ESEMPI. • Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1 + \sin(x)}}{\ln(\cos(x))}.$$

SOLUZIONE. Tutti gli sviluppi si intendono per $x \rightarrow 0$. Iniziamo con il denominatore. Visto che si tratta di un'unica espressione è più semplice usare l'ultima regola e il principio di sostituzione anziché svilupparlo con Taylor (che comunque faremo nel prossimo esercizio). Allora, prima serve un piccolo trucco

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 + \overbrace{(\cos(x) - 1)}{=:t \rightarrow 0}\right) \sim t = \cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Abbiamo verificato l'ultima equazione (con segno opposto) già a pagina 71. Si potrebbe, però, anche ragionare usando lo sviluppo

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Poiché il denominatore è di 2° ordine, dobbiamo sviluppare anche il numeratore fino al 2° ordine: Ponendo $t = \frac{x}{2}$ otteniamo

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) = e^{\frac{x}{2}}.$$

Inoltre ponendo ora $t := \sin(x)$ segue (per lo sviluppo della radice $\sqrt{1+t}$ cfr. pagina 69)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) \\ &= 1 + \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sin^2(x)}{8} + o(\overbrace{\sin^2(x)}{\sim x^2}) = \sqrt{1 + \sin(x)}. \end{aligned}$$

Per la penultima regola $o(\sin^2(x)) = o(x^2)$ e usando lo sviluppo $\sin(x) = x + o(x^2)$ segue

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sin(x)} &= 1 + \frac{x+o(x^2)}{2} - \frac{(x+o(x^2))^2}{8} + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x+o(x^2)}{2} - \frac{\overbrace{x^2+2x \cdot o(x^2)}^{=o(x^3)=o(x^2)} + \overbrace{o(x^2)^2}^{=o(x^4)=o(x^2)}}{8} + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1 + \sin(x)} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \\ &= 2 \cdot \frac{x^2}{8} + o(x^2) = \frac{x^2}{4} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{4}.\end{aligned}$$

Qui è importante osservare che soltanto dopo aver sviluppato *tutto* il numeratore si usa l'asintoticità, farlo prima significherebbe usare il principio di sostituzione per una differenza (che è gravemente sbagliato!!). Quindi per il principio di sostituzione per rapporti risulta

$$\frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1 + \sin(x)}}{\ln(\cos(x))} \sim \frac{\frac{x^2}{4}}{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{2}$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1 + \sin(x)}}{\ln(\cos(x))} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

- Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) + \ln(\cos(x))}{x^4 + x^5}.$$

SOLUZIONE. Tutti gli sviluppi si intendono per $x \rightarrow 0$. Iniziamo come sempre con il denominatore: Visto che $x^5 = o(x^4)$ risulta

$$x^4 + x^5 = x^4 + o(x^4) \sim x^4.$$

Quindi il numeratore è da sviluppare fino al 4° ordine.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Mentre nell'esempio precedente era sufficiente osservare che $\ln(\cos(x)) \sim -\frac{x^2}{2}$ qui *non* possiamo ragionare così altrimenti si applicherebbe il principio di sostituzione ad una differenza. Dobbiamo invece sviluppare $\ln(\cos(x))$ fino al 4° ordine: Allora

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 + \overbrace{(\cos(x) - 1)}^{=:t \rightarrow 0}\right)$$

con

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

e

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Non è necessario sviluppare $\ln(1+t)$ fino a t^4 poiché $t = \cos(x) - 1$ è di ordine 2 e di conseguenza t^2 espresso in x diventa di 4° ordine. Inoltre, nello sviluppo di $\ln(1+t)$ dobbiamo sostituire t con $\cos(x) - 1$ sviluppato fino al 4° ordine mentre nell'espressione $\frac{t^2}{2}$ basta come vedremo lo sviluppo fino al 2° ordine. Non è sbagliato

segue con $t := \sin(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2} + o(\sin^2(x)) \\ &= 1 + x + o(x^2) + \frac{(x + o(x^2))^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2 + 2x \cdot o(x^2) + o(x^2)^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{6x} + \overbrace{\frac{1}{x} \cdot o(x^3)}^{=o(\frac{1}{x} \cdot x^3) = o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2). \end{aligned}$$

Notiamo che qui era necessario sviluppare $\sin(x)$ fino al 3° ordine poiché la divisione per x abbassa l'ordine per 1. Così risulta

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) - x + o(x^2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^2 + o(x^2) \sim \frac{2}{3} \cdot x^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x}{\tan^2(3x)} \sim \frac{\frac{2}{3} \cdot x^2}{9 \cdot x^2} = \frac{2}{27}$$

che implica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x}{\tan^2(3x)} = \frac{2}{27}. \quad \square$$

Concludiamo questi esempi con una

OSSERVAZIONE. In questo esempi abbiamo calcolato sviluppi di Taylor di diverse funzioni usando sviluppi noti e le regole per il calcolo con gli $o(\cdot)$ *senza* fare alcuna derivata. Usando la terza osservazione su pagina 67 in questa maniera abbiamo anche calcolato i polinomi di Taylor. Per esempio

$$\begin{aligned} f(x) := \sqrt{1 + \sin(x)} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) &\Rightarrow T_2(x) &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \\ f(x) := \ln(\cos(x)) &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) &\Rightarrow T_4(x) &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}, \\ f(x) := e^{\sin(x)} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) &\Rightarrow T_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

dove il polinomio di Taylor si riferisce alla corrispondente funzione f e il centro $x_0 = 0$.

Mentre le prime due applicazioni della Formula di Taylor usavano il resto di Peano, la terza fa uso del resto di Lagrange.

Calcolo Numerico.

PROBLEMA. Data una funzione (possibilmente complicata) $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in (a, b)$, trovare un valore approssimato per $f(x)$, per esempio calcolare $\cos(\frac{1}{2})$ con un errore $< 10^{-3}$.

L'idea per risolvere questo problema è di usare la Formula di Taylor con resto di Lagrange: Esiste c tra x e x_0 tale che

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{=T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{=R_n(x)}$$

dove il centro $x_0 \in (a, b)$ e l'ordine n sono ancora da determinare. Se sappiamo che $|f^{(n+1)}(s)| \leq M$ per ogni $s \in (a, b)$ allora possiamo stimare l'errore $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

e così si può valutare la precisione dell'approssimazione. Rimane la scelta del centro $x_0 \in (a, b)$ che deve rispettare i seguenti principi:

- (i) in x_0 si devono conoscere valore e tutte le derivate di f fino al n -esimo ordine, cioè $f^{(k)}(x_0)$ per $k = 0, 1, \dots, n$, altrimenti non si può calcolare T_n esplicitamente;
- (ii) tra tutti i punti in (i) si sceglie quello che sta più vicino a x in maniera che il fattore $|x - x_0|^{n+1} = (\text{distanza tra } x \text{ e } x_0)^{n+1}$ sia più piccolo possibile.

Se, fortunatamente, $|x - x_0| < 1$, allora le potenze $|x - x_0|^{n+1} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi contribuisce, insieme al fattoriale $(n+1)!$ nel denominatore, a diminuire l'errore $|R_n(x)|$ fatto.

Consideriamo alcuni esempi concreti:

ESEMPI. • Calcolare $\cos(\frac{1}{2})$ con un errore $< 10^{-3}$.

SOLUZIONE. Qui $f = \cos$ e $x = \frac{1}{2}$. Visto che qualsiasi derivata di f è data da $\pm \sin(x)$ oppure $\pm \cos(x)$ vale

$$|f^{(k)}(s)| \leq 1 =: M \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ ed ogni } s \in \mathbb{R}.$$

Passiamo alla scelta del centro x_0 . Il punto più vicino a $x = \frac{1}{2}$ nel quale si conoscono tutte le derivate di $f = \cos$ è $x_0 = 0$. Così otteniamo la stima³

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left| \frac{1}{2} - 0 \right|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \stackrel{!}{<} 10^{-3}$$

Questo è una disuguaglianza in n che è equivalente a

$$(n+1)! \cdot 2^{n+1} > 1000.$$

Per trovare il valore $n \in \mathbb{N}$ più piccolo che verifica questa relazione si deve procedere per tentativi:

n	$(n+1)! \cdot 2^{n+1}$
1	$2 \cdot 4 = 8$
2	$6 \cdot 8 = 48$
3	$24 \cdot 16 = 384$
4	$120 \cdot 32 = 3840 > 1000 \checkmark$

³qui il simbolo $\stackrel{!}{<} 10^{-3}$ significa che "deve essere $<$ ".

Quindi possiamo scegliere $n = 4$ e così risulta

$$\left| \cos\left(\frac{1}{2}\right) - T_4\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{3840} < 10^{-3}.$$

Infine T_4 è dato da

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \Rightarrow \quad T_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} = \frac{337}{384}.$$

Riassumendo abbiamo verificato che

$$\left| \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{337}{384} \right| \leq \frac{1}{3840} < 10^{-3},$$

cioè la soluzione è $\frac{337}{384}$. □

- Usare uno sviluppo di secondo ordine per calcolare un valore approssimativo di $\sqrt[2]{30}$ valutando anche l'errore fatto.

SOLUZIONE. Il numero quadrato più vicino a $x = 30$ è $25 = 5^2$ e quindi scegliamo come centro $x_0 = 25$ (le derivate di $\sqrt[2]{x}$ contengono ancora $\sqrt[2]{x}$, pertanto questa scelta semplificherà i calcoli). Per la Formula di Taylor con il resto di Lagrange esiste poi un $c \in [x_0, x] = [25, 30]$ tale che

$$f(x) = \sqrt{x} = \underbrace{f(25) + f'(25) \cdot (x - 25) + \frac{f''(25)}{2!} \cdot (x - 25)^2}_{T_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(c)}{3!} \cdot (x - 25)^3}_{R_2(x)},$$

dove

$$\begin{aligned} f(x) = x^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow f(25) = 5, \\ f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} &\Rightarrow f'(25) = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}, \\ f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} &\Rightarrow \frac{f''(25)}{2!} = -\frac{1}{4 \cdot 5^3 \cdot 2} = -\frac{1}{1000}, \\ f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}} &\Rightarrow \frac{f'''(c)}{3!} = \frac{3}{8 \cdot 6} \cdot c^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{16} \cdot c^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

e quindi sostituendo $x = 30$ risulta

$$\begin{aligned} \sqrt{30} &= 5 + \frac{1}{10} \cdot 5 - \frac{1}{1000} \cdot 5^2 + \frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16} \cdot 5^3 \\ &= \underbrace{\frac{219}{40}}_{=\text{valore approssimativo}} + \underbrace{\frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16} \cdot 5^3}_{=\text{errore } R_2(30) \text{ compiuto}} \end{aligned}$$

con $c \in [25, 30]$. Per stimare l'errore osserviamo che la funzione $c^{-\frac{5}{2}}$ è decrescente in c e quindi segue

$$R_2(30) = \frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16} \cdot 5^3 \leq \frac{25^{-\frac{5}{2}}}{16} \cdot 5^3 = \frac{1}{400}.$$

Riassumendo, lo sviluppo di secondo ordine dà come approssimazione di $\sqrt{30}$ il valore $\frac{219}{40}$ che lascia un errore $\leq \frac{1}{400} = 0,0025$. □

ESERCIZIO. Calcolare \sqrt{e} con un errore $< \frac{1}{1000}$. (Suggerimento: $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$.)

OSSERVAZIONE. In entrambi gli esempi la funzione f ammetteva derivate di qualsiasi ordine. Ci si può chiedere che cosa succede con l'approssimazione $T_n(x)$ di $f(x)$ se $n \rightarrow +\infty$. Per studiare questo problema definiamo dapprima per un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

$$C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I).$$

Quindi $f \in C^\infty(I)$ significa che $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ammette derivate $f^{(n)}$ di qualsiasi ordine $n \in \mathbb{N}$.

Serie di Taylor

Se per $f \in C^\infty(a, b)$ esiste $M \geq 0$ tale che

$$|f^{(k)}(x)| \leq M^k \quad \text{per ogni } x \in (a, b) \text{ ed ogni } k \in \mathbb{N}$$

allora possiamo stimare il resto $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ come

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq \underbrace{\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}}_{=: r_n} \cdot |x - x_0|^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Per verificare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ si usa un trucco: Calcoliamo

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{M^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+2}}{|x - x_0|^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{M^{n+1}} = \frac{M \cdot |x - x_0|}{n+2} \rightarrow 0 =: q < 1.$$

Ciò implica che per il criterio del rapporto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ converge e quindi il criterio necessario per la convergenza di una serie implica $r_n = R_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Di conseguenza

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n(x) + \overbrace{R_n(x)}^{\rightarrow 0}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) \quad \text{per ogni } x \in (a, b).$$

Quindi abbiamo dimostrato il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 5.20. *Sia $f \in C^\infty(a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$. Se esiste $M \geq 0$ tale che $|f^{(k)}(x)| \leq M^k$ per ogni $x \in (a, b)$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$, allora*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{=: T_n(x) \text{ Polinomio di Taylor}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{=: \text{Serie di Taylor}}$$

Quindi, se f è C^∞ e le derivate $f^{(k)}$ non crescono troppo rapidamente con l'ordine k , $f(x)$ si può rappresentare come *Serie di Taylor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad \text{per ogni } x \in (a, b)$$

ESEMPLI. • $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $|\sin^{(k)}(x)| \leq 1 =: M = M^k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi dallo sviluppo a pagina 68 segue (con $x_0 = 0$)

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Similmente seguono i seguenti sviluppi di altre funzioni elementari

- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$

- $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$

- $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k}$ per ogni $x \in (-1, 1)$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in (-1, 1)$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ per ogni $x \in (-1, 1)$
- $\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ per ogni $x \in (-1, 1)$

Concludiamo questo capitolo sul calcolo differenziale con lo

Studio di Funzione

PROBLEMA. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tracciare un grafico approssimativo di f .

Per risolvere questo problema conviene procedere cercando di seguire lo schema seguente più possibile. Si tenga presente che spesso non è possibile eseguire tutti i punti sottolencati. In questi casi le informazioni mancanti (p.e. esistenza di zeri, estremi locali ecc.) si possono eventualmente dedurre alla fine dello studio come conseguenza delle altre informazioni.

- (i) *Determinazione del dominio X* : Sono da individuare tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali l'espressione $f(x)$ sia ben definita. Per esempio
- argomenti sotto radici di ordine pari devono essere ≥ 0 ,
 - argomenti di logaritmi devono essere > 0 ,
 - la base di un'esponenziale deve essere > 0 ,
 - denominatori devono essere $\neq 0$, ecc.

In generale, per calcolare il dominio X di una funzione si deve risolvere un sistema di disequazioni.

ESEMPIO. Sia $f(x) := \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{2-\ln(x^2-2)}}$. Allora il numeratore è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ mentre per il denominatore si deve verificare

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2 > 0 \quad \text{e} \quad 2 - \ln(x^2 - 2) > 0 &\iff x^2 > 2 \quad \text{e} \quad 2 > \ln(x^2 - 2) \\
 &\iff |x| > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad e^2 > x^2 - 2 \\
 &\iff |x| > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad |x| < \sqrt{e^2 + 2} \\
 &\iff x \in (-\sqrt{e^2 + 2}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{e^2 + 2}).
 \end{aligned}$$

- (ii) *Simmetrie (pari, dispari) e periodicità*: cfr. pagine 30 e 31.
 (iii) *Intersezioni con gli assi*: Con l'asse- x : risolvere l'equazione $f(x) = 0$. Con l'asse y : se $0 \in X$ calcolare $f(0)$.
 (iv) *Segno della funzione*: Risolvere l'equazione $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$).

- (v) *Calcolo dei limiti (da destra/sinistra) alla frontiera di X*: Si calcolano i limiti (da destra/sinistra) di $f(x)$ negli estremi finiti, se esistono, del dominio X e si deducono gli eventuali *asintoti verticali*, cfr. pagina 37. Se X è illimitato, si calcolano inoltre i limiti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) =: l$, determinando se vi sono *asintoti orizzontali* $y = l$ (se $l \in \mathbb{R}$), cfr. pagina 37. Se invece $l = \pm\infty$ si procede con la
- (vi) *Individuazione degli asintoti obliqui*: Se esistono $m \neq 0$ e $q \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - [m \cdot x + q]) = 0 \quad \text{e/o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - [m \cdot x + q]) = 0$$

allora si dice che la retta $y = mx + q$ è *asintoto obliquo* per f a $+\infty$ e/o $-\infty$. Graficamente ciò significa che la distanza tra il grafico di f e la retta $y = mx + q$ tende a 0 per $x \rightarrow \pm\infty$. Per verificare l'esistenza di un asintoto obliquo si procede come segue: Si verifica prima se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} =: m \neq 0 \quad = \text{pendenza dell'asintoto.}$$

Nel caso affermativo si verifica se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) =: q \quad = \text{ordinata all'origine dell'asintoto.}$$

Se entrambi i limiti esistono in \mathbb{R} con $m \neq 0$, allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo di f per $x \rightarrow \pm\infty$.

ESEMPIO. Sia $f(x) := \ln(e^{3x+2} + 5)$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(5), \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi $y = \ln(5)$ è un asintoto orizzontale di f per $x \rightarrow -\infty$. Inoltre, può esistere un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Per ciò studiamo

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{3x+2} + 5)}{x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3 \cdot e^{3x+2}}{e^{3x+2} + 5}}{1} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9 \cdot e^{3x+2}}{3 \cdot e^{3x+2}} = 3$$

e inoltre (usando la continuità del logaritmo)

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{3x+2} + 5) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{3x+2} + 5) - \ln(e^{3x})) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^{3x+2} + 5}{e^{3x}}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+2} + 5}{e^{3x}}\right) \stackrel{\text{H}}{=} \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot e^{3x+2}}{3 \cdot e^{3x}}\right) \\ &= \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot e^2}{3 \cdot e^{3x}}\right) = \ln(e^2) = 2. \end{aligned}$$

Pertanto la retta di equazione

$$y = 3x + 2$$

è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ della funzione data, cfr. Figura 44.

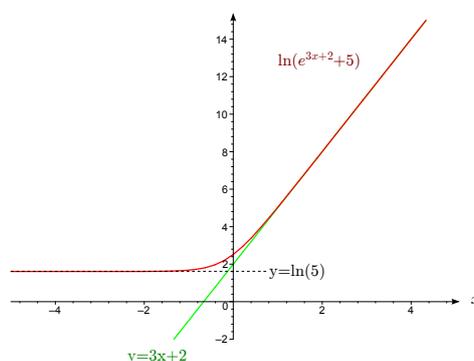


FIGURA 44. Asintoto obliquo.

- (vii) *Studio della derivata prima (crescenza/decrecenza, punti critici ed estremi locali):* Si calcola la derivata prima $f'(x)$ e il corrispondente dominio. Risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$ si calcolano i punti critici x_0 di f . Eventualmente, studiando il cambiamento del segno di $f'(x)$ in $x = x_0$ si può classificare la natura del punto critico (minimo o massimo locale, cfr. pagina 59). Infine si studia il segno di $f'(x)$ per ottenere informazioni sulla monotonia di f .
- (viii) *Studio della derivata seconda (estremi locali, concavità/convessità, punti di flesso):* Si calcola (se non si ottiene un'espressione troppo complessa) la derivata seconda. Se i punti critici non sono già stati classificati nel punto (vii) si calcolano i valori di f'' nei punti critici per poi applicare il criterio per estremi locali, cfr. pagina 69.

DEFINIZIONE. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(a, b) \subset X$. Se $f'(x)$ in (a, b) è

- crescente, allora si dice che f è *convessa* (oppure *concava verso l'alto*) in (a, b) ,
- decrescente, allora si dice che f è *concava* (oppure *concava verso il basso*) in (a, b) .

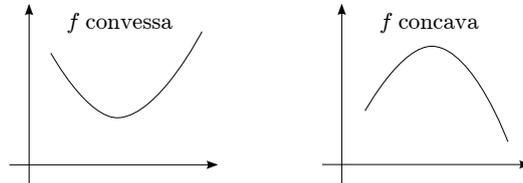


FIGURA 45. Funzioni convesse e concave.

Dal test di monotonia (cfr. pagina 59) segue che se $f \in C^2(a, b)$, allora

$$f \text{ è convessa in } (a, b) \iff f' \text{ è crescente in } (a, b) \iff f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b),$$

$$f \text{ è concava in } (a, b) \iff f' \text{ è decrescente in } (a, b) \iff f''(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b).$$

Diremo che $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ammette retta tangente in $x_0 \in (a, b)$ se il rapporto incrementale di f in x_0 ammette limite (finito o infinito), cioè se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

DEFINIZIONE. Un punto $(x_0, f(x_0))$ si chiama (*punto di*) *flesso* di $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$, se f è continua in (a, b) , derivabile in $(a, b) \setminus \{x_0\}$ e se

- f ammette retta tangente in x_0 , e
- la concavità di f è opposta dalle due parti di x_0 .

Si nota che per $f \in C^2(a, b)$ in un punto di flesso $x_0 \in (a, b)$ vale necessariamente $f''(x_0) = 0$ per il teorema degli zeri.

ESEMPLI. (Cfr. Figura 46)

- Sia $f(x) = x^3$. Allora $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$. Visto che $f''(x) < 0$ per $x < 0$ e $f''(x) > 0$ per $x > 0$, l'origine è un punto di flesso di f .
- Sia $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Allora f ammette una retta tangente verticale in $x_0 = 0$. Inoltre $f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}$ e $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}-1}}{3} = -\frac{2 \cdot x^{-\frac{5}{3}}}{9}$ per $x \neq 0$. Quindi $f''(x) > 0$ per $x < 0$ e $f''(x) < 0$ per $x > 0$ e allora l'origine è un punto di flesso di f .
- Sia $f(x) = |x| + x^3$. Allora il rapporto incrementale di f in $x_0 = 0$ è dato da

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{|h| + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{|h|}{h} + h^2 \right) = \pm 1.$$

Quindi f non ammette tangente in $x_0 = 0$ e quindi $(0, 0)$ *non* è un punto di flesso di f , nonostante che f cambia concavità in quel punto.

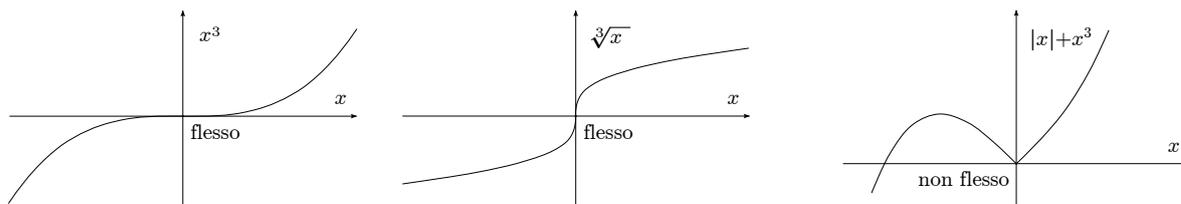


FIGURA 46. Punti di flesso e no.

Seguendo questo schema è utile tracciare il grafico gradualmente, inserendo le informazioni via via raccolte anziché raccogliere tutto e poi fare il grafico: i processi graduali aiutano a controllare la coerenza del procedimento e a capire quali informazioni è ancora utile raccogliere.

Consideriamo ora un esempio completo.

ESEMPIO. Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|$ e tracciarne un grafico approssimativo.

SOLUZIONE: (i) *Dominio*: $f(x)$ è definito per ogni $x \neq 3$ e quindi $X = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(ii) *Simmetrie*: il grafico di f non rappresenta simmetrie.

(iii) *Intersezione con gli assi*: Visto che la funzione esponenziale è sempre > 0 , $f(x) = 0 \iff |x+3| = 0 \iff x+3 = 0 \iff x = -3$. Inoltre vale $0 \in X$ e $f(0) = e^{\frac{1}{-3}} \cdot |3| = \frac{3}{\sqrt[3]{e}}$.

(iv) *Segno di $f(x)$* : Visto che il modulo è sempre ≥ 0 , $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$.

(v) *Limiti alla frontiera del dominio*: I punti di frontiera di X sono: $-\infty, 3, +\infty$. Studiamo perciò i limiti (da destra/sinistra dove indicato) in quei punti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\overbrace{x-3}^{-0}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{+\infty} = e^0 \cdot (+\infty) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} e^{\overbrace{x-3}^{\frac{1}{0^-} = -\infty}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{-6} = e^{-\infty} \cdot 6 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} e^{\overbrace{x-3}^{\frac{1}{0^+} = +\infty}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{-6} = e^{+\infty} \cdot 6 = +\infty. \end{aligned}$$

Quindi la retta $x = 3$ rappresenta un asintoto verticale per $x \rightarrow 3^+$. Visto che

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, possono esistere

(vi) *Asintoti obliqui per $x \rightarrow \pm\infty$* : Allora calcoliamo

$$m_{\pm} := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\overbrace{\frac{1}{x-3}}^{-1}} \cdot |x+3|}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x+3|}{x} = \pm 1,$$

e

$$\begin{aligned}
 q_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - m_{\pm}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3| \mp x) \\
 &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (x+3) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((e^{\frac{1}{x-3}} - 1) \cdot x + \overbrace{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 3}^{\rightarrow e^0 \cdot 3 = 3} \right) & \text{nel caso "+"}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (-x-3) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((1 - e^{\frac{1}{x-3}}) \cdot x - \underbrace{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 3}_{\rightarrow e^0 \cdot 3 = 3} \right) & \text{nel caso "-"}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Quindi studiamo prima

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left((e^{\frac{1}{x-3}} - 1) \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-3}} - 1}{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x}{x-3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-3} = 1 \cdot 1 = 1,$$

ove abbiamo usato che $t := \frac{1}{x-3} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Così risulta

$$q_{\pm} = \pm 1 \pm 3 = \pm 4$$

e quindi $y = x + 4$ e $y = -x - 4$ sono asintoti obliqui per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, rispettivamente.(vii) *Studio di $f'(x)$* : Visto che $|x+3|$ è derivabile per ogni $x \neq -3$, la funzione è derivabile per ogni $x \in X$ con $x \neq -3$. Inoltre per il rapporto incrementale nel punto $x_0 = -3$ vale

$$\begin{aligned}
 f'_{\pm}(-3) &= \lim_{x \rightarrow -3^{\pm}} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3^{\pm}} \frac{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3| - 0}{x+3} \lim_{x \rightarrow -3^{\pm}} e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{|x+3|}{x+3} \\
 &= e^{-\frac{1}{6}} \cdot (\pm 1) = \pm e^{-\frac{1}{6}}.
 \end{aligned}$$

Quindi $f'_-(-3) \neq f'_+(-3)$ e di conseguenza f non è derivabile in $x_0 = -3$. Calcoliamo ora $f'(x)$ per $x \neq \pm 3$: per $x > -3$, $x \neq 3$ vale

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|)' = (e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (x+3))' = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{-1}{(x-3)^2} \cdot (x+3) + e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 1 \\
 &= e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{(x-3)^2 - (x+3)}{(x-3)^2} = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2}.
 \end{aligned}$$

Similmente segue per $x < -3$

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|)' = (e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (-x-3))' = -e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2}$$

e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2} & \text{se } x > -3, x \neq 3, \\ -e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2} & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

Calcoliamo ora i punti critici di f : Visto che la funzione esponenziale non ammette zeri, segue che

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\iff x^2 - 7x + 6 = 0 \iff x = x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \\
 &\iff x = x_1 = 6 \text{ opp. } x = x_2 = 1.
 \end{aligned}$$

Studiamo ora la monotonia di f attraverso il segno di $f'(x)$: Visto che

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2} &> 0 \quad \forall x \neq 3 \quad \text{e} \\
 x^2 - 7x + 6 &= (x-6) \cdot (x-1)
 \end{aligned}$$

segue che

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2} \cdot (x-6) \cdot (x-1) < 0 & \text{per } x < -3, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2} \cdot (x-6) \cdot (x-1) > 0 & \text{per } -3 < x < 1, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2} \cdot (x-6) \cdot (x-1) < 0 & \text{per } 1 < x < 6, x \neq 3, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2} \cdot (x-6) \cdot (x-1) > 0 & \text{per } 6 < x. \end{cases}$$

Di conseguenza

f è strettamente crescente in $(-3, 1) \cup (6, +\infty)$,

f è strettamente decrescente in $(-\infty, -3) \cup (1, 6) \setminus \{3\}$.

(viii) *Studio di $f''(x)$* : f' è derivabile per $x \neq \pm 3$. Inoltre per $x > -3$, $x \neq 3$ vale

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2} \right)' \\ &= e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{-1}{(x-3)^2} \cdot \frac{(x^2 - 7x + 6)}{(x-3)^2} + e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{(x-3)^2 \cdot (2x-7) - 2(x-3) \cdot (x^2 - 7x + 6)}{((x-3)^2)^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot \left((x-3)^2 \cdot (2x-7) - 2(x-3) \cdot (x^2 - 7x + 6) - (x^2 - 7x + 6) \right) \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x - 33). \end{aligned}$$

Similmente per $x < -3$ si ottiene

$$f''(x) = \left(-e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2} \right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x - 33).$$

Quindi risulta

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x - 33) & \text{se } x > -3, x \neq 3, \\ -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x - 33) & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

Classifichiamo i due punti critici $x_1 = 6$ e $x_2 = 1$ trovati nel punto precedente:

Visto che $\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} > 0$ per ogni $x \in X$ segue che

$\text{segno}(f''(6)) = \text{segno}(13 \cdot 6 - 33) > 0 \Rightarrow x_1 = 6$ è un punto di minimo locale,

$\text{segno}(f''(1)) = \text{segno}(13 \cdot 1 - 33) < 0 \Rightarrow x_2 = 1$ è un punto di massimo locale

con $f(6) = 9 \cdot e^{\frac{1}{3}} = 9 \cdot \sqrt[3]{e}$, $f(1) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}$. Per trovare eventuali flessi risolviamo

$$f''(x) = 0 \iff 13x - 33 = 0 \iff x_0 := x = \frac{33}{13}.$$

Inoltre per $x \neq \pm 3$ vale

$$f''(x) \geq 0 \iff x \geq \frac{33}{13}, \quad \text{cioè } f \text{ è convessa in } \left(\frac{33}{13}, 3\right) \text{ e } (3, +\infty)$$

$$f''(x) \leq 0 \iff x \leq \frac{33}{13}, \quad \text{cioè } f \text{ è concava in } (-\infty, -3) \text{ e } \left(-3, \frac{33}{13}\right)$$

e quindi risulta che $x_0 = \frac{33}{13}$ è un punto di flesso.

Da tutte le informazioni ottenute risulta che f ha il seguente grafico.

□

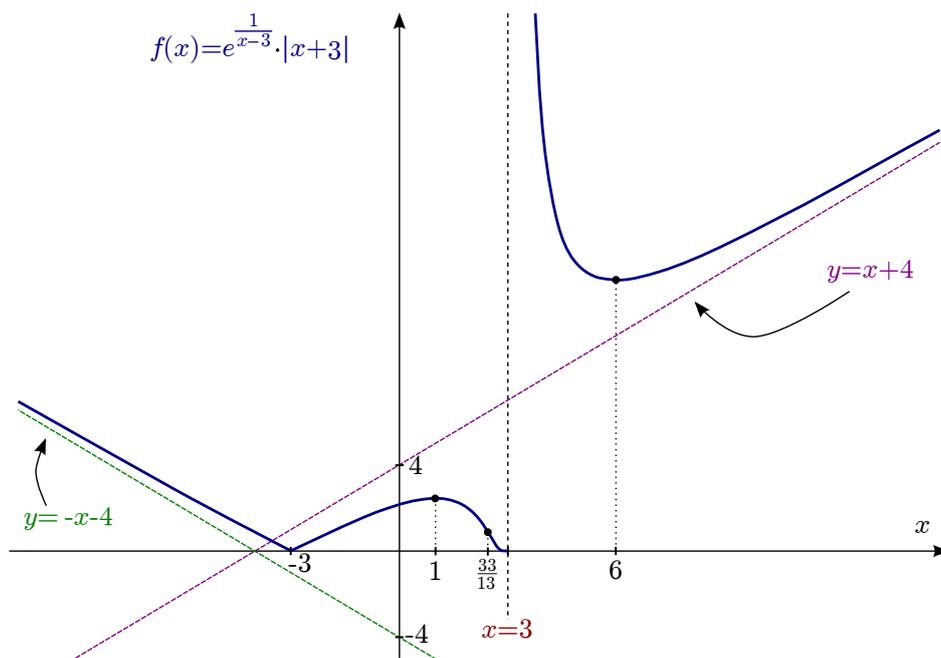


FIGURA 47. Studio di $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|$.

Calcolo Integrale di Funzioni di una Variabile

Integrale: Definizione e prime Proprietà

PROBLEMA. Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, calcolare l'area A tra il grafico di f e l'asse x , cfr. Figura 48.

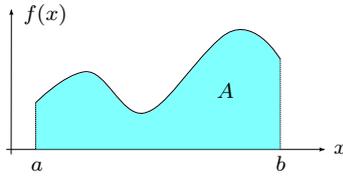


FIGURA 48. L'area A .

L'idea per risolvere questo problema è di approssimare l'area A da sotto e da sopra, cioè per eccesso e per difetto.

Se poniamo $m := \inf f$ e $M := \sup f$, allora sicuramente

$$m \cdot (b - a) \leq A \leq M \cdot (b - a),$$

che però dà una approssimazione troppo scarsa. Per migliorarla dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in tanti sottointervalli e procediamo in ogni sottointervallo come prima.

Per precisare questa idea ci serve una

DEFINIZIONE 6.1. • Un insieme $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si chiama *partizione di* $[a, b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

- Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e P è una partizione di $[a, b]$, allora definiamo per $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$m_i := \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$M_i := \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} (= \text{lunghezza dell'intervallo } [x_{i-1}, x_i])$$

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i =: \text{somma inferiore (cfr. Figura 49)}$$

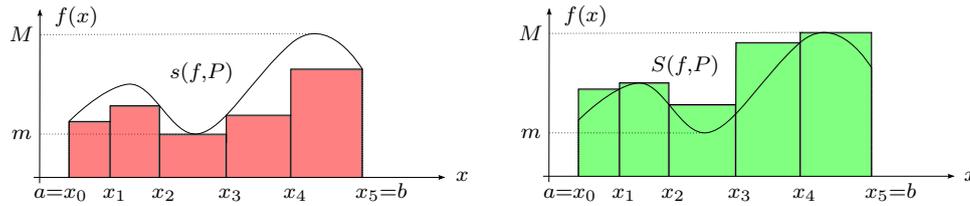
$$S(f, P) := \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i =: \text{somma superiore (cfr. Figura 49)}$$

Quindi per ogni partizione P di $[a, b]$ vale

$$s(f, P) \leq A \leq S(f, P),$$

cioè le somme inferiori sono sempre approssimazioni di A per difetto mentre le somme superiori danno sempre approssimazioni per eccesso. Perciò

- più *grande* è $s(f, P)$ meglio è,
- più *piccolo* è $S(f, P)$ meglio è.

FIGURA 49. Somma inferiore $s(f, P)$ e somma superiore $S(f, P)$.

Se non c'è differenza tra “la migliore” approssimazione da sotto (cioè quella più grande per difetto) e quella “migliore” da sopra (cioè quella più piccola per eccesso), allora il problema è (teoricamente) risolto e f si dice *integrabile*.

Per precisare questo procedimento facciamo la seguente

DEFINIZIONE 6.2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Se

$$\sup\{s(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\} = \inf\{S(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\} =: I,$$

allora f si dice *integrabile* (secondo [Riemann](#)¹). In questo caso $A = I$ e

$$I := \int_a^b f(x) dx$$

si dice *integrale* di f (= funzione integranda) in $[a, b]$ (= dominio dell'integrazione).

OSSERVAZIONI. • Come variabile di integrazione non è necessario scegliere x si può anche scrivere

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

- f è integrabile \iff per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P = P_\varepsilon$ tale che

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

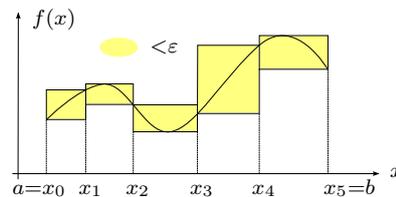


FIGURA 50. Criterio per l'integrabilità.

- L'area sotto l'asse x è *negativa*, per esempio se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := -1$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora $\int_0^1 f(x) dx = -1$.
- In un certo senso

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

che spiega l'uso della notazione $\int_a^b f(x) dx$ (inventata da Leibniz più di 300 anni fa) per l'integrale.

Consideriamo alcuni

ESEMPLI. • Se f è costante, cioè $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $s(f, P) = S(f, P) = c \cdot (b-a)$ per $P = \{a, b\}$ e quindi f è integrabile con $\int_a^b f(x) dx = c \cdot (b-a)$.

¹Ci sono altri modi per affrontare questo problema che portano a definizioni diverse, per esempio quella di Lebesgue.

- La funzione di Dirichlet (cfr. pagina 41)

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile. Infatti visto che per ogni partizione P ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene sia punti razionali (in cui f ammette il valore 1) sia punti irrazionali (in cui f ammette il valore 0) segue $m_i = 0$ e $M_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Così risulta per ogni partizione

$$s(f, P) = 0 \neq b - a = S(f, P)$$

che implica che f non è integrabile.

Continuiamo studiando alcune

Proprietà dell'Integrale. Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili. Allora

- $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è integrabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni integrabili con dominio $[a, b]$ è uno spazio vettoriale) e

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$$

(cioè l'integrale è un'operazione *lineare*);

- Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(cioè l'integrale è *monotona*);

- anche $|f|$ è integrabile e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(*disuguaglianza triangolare*).

- per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\int_a^\beta f(x) dx + \int_\beta^\gamma f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx$$

(*additività* dell'integrale rispetto agli estremi di integrazione)

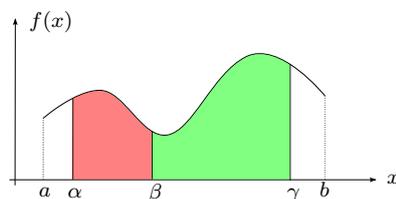


FIGURA 51. Additività rispetto agli estremi di integrazione.

ove definiamo

$$\int_\alpha^\alpha f(x) dx := 0 \quad \text{e} \quad \int_\alpha^\beta f(x) dx := - \int_\beta^\alpha f(x) dx \quad \text{se } \alpha > \beta;$$

per esempio $\int_1^0 f(x) dx := - \int_0^1 f(x) dx$.

Se la funzione integranda e il dominio di integrazione hanno qualche simmetria, allora l'integrale si semplifica nella seguente maniera.

PROPOSIZIONE 6.3. Sia $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile. Allora

- $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ se f è dispari,
- $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$ se f è pari,

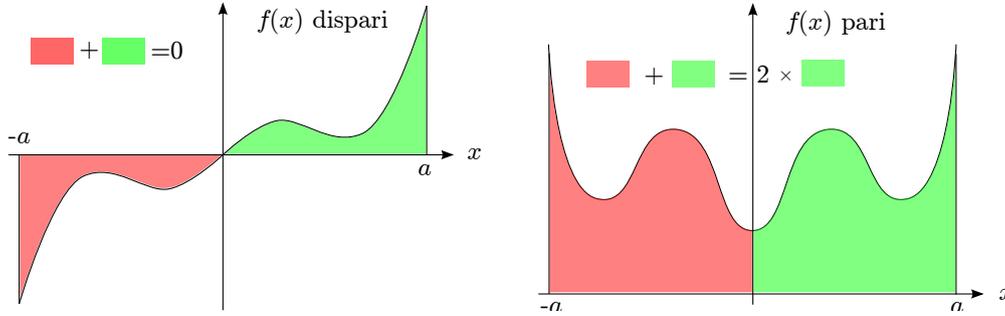


FIGURA 52. Integrazione di funzioni simmetriche.

A questo punto si pongono due

- PROBLEMI.** (i) Quali funzioni sono integrabili?
(ii) Se f è integrabile, come si può calcolare $\int_a^b f(x) dx$?

Per i nostri scopi il seguente risultato dà una risposta sufficiente al primo problema.

TEOREMA 6.4. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e

- ha un numero finito di discontinuità, oppure
- è monotona

allora f è integrabile. In particolare ogni $f \in C[a, b]$ è integrabile.

Qui l'ultima affermazione segue dal primo punto visto che una funzione continua su $[a, b]$ ha zero punti di discontinuità ed è limitata per Weierstraß.

ESEMPI. Le funzioni $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) := \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \text{se } x \in \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right), \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \in [0, 1), \\ x^2 - 2 & \text{se } x \in [1, 2), \\ \sin(2x) & \text{se } x \in [2, 3], \end{cases}$$

sono integrabili in quanto f (nonostante abbia un numero infinito di punti di discontinuità) è crescente e g ha soltanto 2 punti di discontinuità ($x_0 = 1$ e $x_1 = 2$).

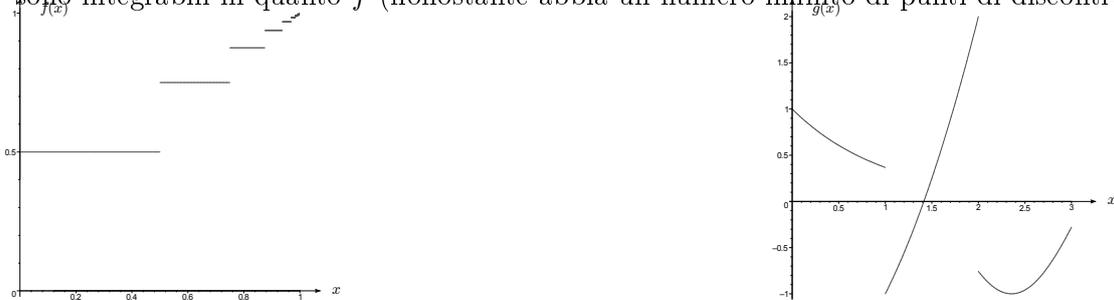


FIGURA 53. Esempi di funzioni integrabili non continue.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Passiamo ora al secondo problema, cioè cerchiamo modi per calcolare $A = \int_a^b f(x) dx$ visto che soltanto in casi particolarmente semplici è possibile di determinare A usando la definizione.

Perciò ci serve prima il seguente

TEOREMA 6.5 (*Teorema della Media*). Se $f \in C[a, b]$, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

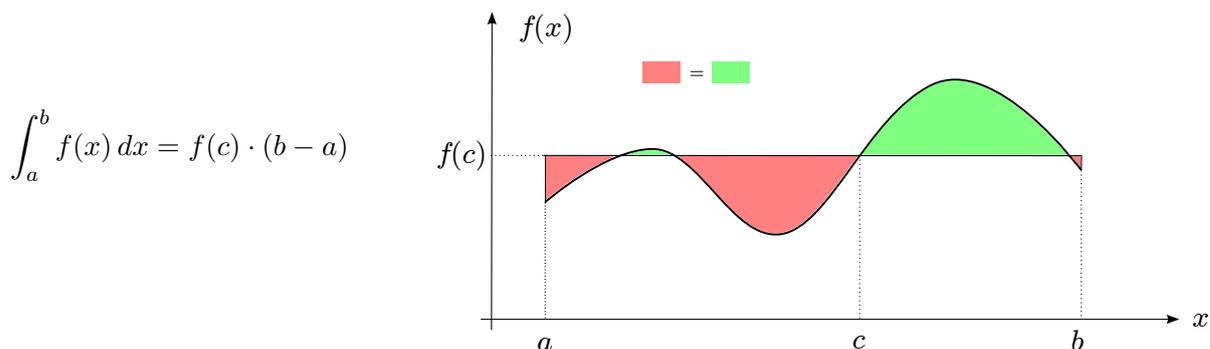


FIGURA 54. Teorema della media.

DIMOSTRAZIONE. Per Weierstraß esistono

$$m := \min f, \quad M := \max f.$$

Inoltre vale (cfr. pagina 87)

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a) \quad \Rightarrow$$

$$\min f = m \leq \underbrace{\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx}_{= \text{valor medio di } f \text{ in } [a, b]} \leq M = \max f.$$

Quindi per il teorema dei valori intermedi (cfr. pagina 42) esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a). \quad \square$$

Dal teorema della media segue un risultato molto importante:

TEOREMA 6.6 (*Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*). Sia $f \in C[a, b]$ allora la funzione

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(s) ds = \text{funzione integrale di } f \text{ (cfr. Figura 55)}$$

è derivabile con

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

DIMOSTRAZIONE. Per verificare la derivabilità di F dobbiamo studiare il suo rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$. Allora usando prima l'additività dell'integrale rispetto agli

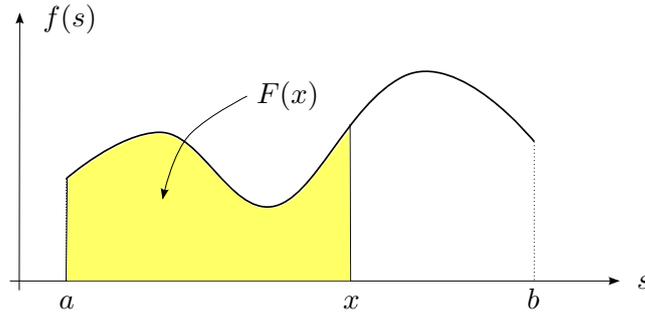


FIGURA 55. La funzione integrale.

estremi di integrazione e poi il teorema della media segue

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(s) ds - \int_a^x f(s) ds}{h} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(s) ds}{h} \\ &= \frac{h \cdot f(c)}{h} = f(c) \end{aligned}$$

per un $c = c_{x,h}$ tra x e $x+h$. Quindi $h \rightarrow 0$ implica $c_{x,h} \rightarrow x$ e la continuità di f implica

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_{x,h}) \rightarrow f(x) \quad \text{per } h \rightarrow 0,$$

cioè F è derivabile con $F'(x) = f(x)$. □

OSSERVAZIONI. • Se G è una funzione derivabile tale che $G' = f$, allora G si dice *primitiva di f* . L'insieme

$$\int f(x) dx := \{G : G \text{ e una primitiva di } f\}$$

si chiama *integrale indefinito di f* .

- Per distinguere un integrale indefinito $\int f(x) dx$ (che rappresenta un'insieme di funzioni) da un integrale $\int_a^b f(x) dx$ (che è un numero reale), quest'ultimo viene anche chiamato *integrale definito*.
- Se F e G sono due primitive di $f \in C[a, b]$ allora

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

e per la caratterizzazione delle funzioni costanti (cfr. pagina 60) esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Per questo motivo se F è una primitiva qualsiasi di f si scrive spesso

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

dove $c \in \mathbb{R}$ indica una costante arbitraria di integrazione.

Siamo ora in grado di dare una soluzione al secondo problema.

COROLLARIO 6.7. Se $f \in C[a, b]$ e G è una primitiva di f (cioè $G' = f$), allora

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) =: [G(x)]_a^b =: G(x)|_a^b}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia F la funzione integrale di f . Allora per il Teorema fondamentale F è una primitiva di f e quindi per l'osservazione precedente esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = G(x) + c$ per ogni $x \in [a, b]$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \overbrace{\int_a^b f(x) dx}^{=F(b)} - \overbrace{\int_a^a f(x) dx}^{=0=F(a)} \\ &= F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a). \end{aligned} \quad \square$$

Quindi vale la seguente

OSSERVAZIONE. Per calcolare $\int_a^b f(x) dx$ “basta” trovare una primitiva di f .

Abbiamo scritto “basta” tra virgolette poiché come vedremo trovare una primitiva di una funzione f (si dice anche integrare f) generalmente non è un compito semplice. Tuttavia possiamo ora calcolare i primi integrali non banali.

ESEMPLI. • Visto che $(\frac{x^3}{3})' = x^2$ segue $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$.

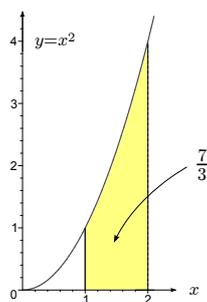


FIGURA 56. Area sotto il grafico.

• Sia $G(x) := \ln|x|$ per $x \neq 0$. Allora G è derivabile e

$$G'(x) = \begin{cases} (\ln(x))' = \frac{1}{x} & \text{se } x > 0, \\ (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

OSSERVAZIONE. Questo fatto ci permette di dare una nuova rappresentazione per il logaritmo: Per $x > 0$ vale

$$\int_1^x \frac{1}{s} ds = \ln(s) \Big|_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x) \quad (\text{cfr. Figura 57}).$$

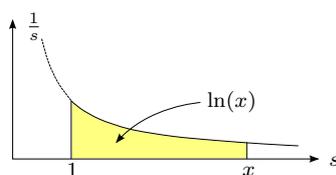


FIGURA 57. Il logaritmo.

- Visto che per ogni $r \neq -1$ vale $(\frac{x^{r+1}}{r+1})' = x^r$ insieme con l'esempio precedente segue

$$\int x^r dx = \begin{cases} \ln|x| + c & \text{se } r = -1 \\ \frac{x^{r+1}}{r+1} + c & \text{se } r \neq -1 \end{cases}$$

- La funzione $G(x) := \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è derivabile con $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e quindi

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

- $\int e^x dx = e^x + c$

- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$

- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

- $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$

- $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$

In questi esempi era semplice di indovinare la primitiva di una funzione integranda data (per esempio per x^r con $r \neq -1$) oppure siamo partiti con una funzione derivabile G che poi per definizione diventa la primitiva della sua derivata $f = G'$.

Nelle applicazioni invece è in generale data una funzione integranda f per la quale non è immediato indovinare una primitiva.

Quindi ci poniamo il seguente

PROBLEMA. Come si può trovare una primitiva di una funzione più complicata?

Per esempio, il logaritmo \ln è continuo e quindi integrabile ma come si può calcolare

$$\int \ln(x) dx = ?$$

Per risolvere questo problema studiamo ora alcuni

Metodi di Integrazione

L'idea per trovare una primitiva di una funzione è che, grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, *la derivazione e l'integrazione sono operazioni inverse*, cioè:

Se h è derivabile con continuità (brevemente si dice $h \in C^1$), allora

$$(*) \quad \int h'(x) dx = h(x) + c.$$

Così una regola di derivazione implica una regola associata di integrazione.

Integrazione per Parti. Sappiamo che se f, g sono C^1 allora anche $h := f \cdot g$ è C^1 con

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Quindi da (*) segue

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx = \int \underbrace{(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x))}_{=h'(x)} dx = \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{=h(x)} + c$$

Così risultano le formule

- *Integrazione per Parti* (versione indefinita)

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

- *Integrazione per Parti* (versione definita)

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Quindi il metodo di integrazione per parti corrisponde alla regola di derivazione di un prodotto.

Vediamo ora come si applica questa regola

- ESEMPI.** • Utilizziamo integrazione per parti per calcolare

$$\int x^r \cdot \ln(x) dx$$

per $r \neq -1$. A questo punto dobbiamo decidere quale dei fattori è $f'(x)$ e quale $g(x)$. Ma visto che con la scelta $f'(x) = \ln(x)$ non si può continuare non conoscendo la primitiva del logaritmo, l'unica possibilità è $x^r = f'(x)$ e $\ln(x) = g(x)$ e quindi (siccome $r \neq -1$) $f(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Così risulta

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^r}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} dx &= \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} dx \\ &= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{r+1} \cdot \int x^r dx \\ &= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \\ &= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{(r+1)^2} \cdot x^{r+1} + c \\ &= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{r+1} \right) + c. \end{aligned}$$

In questo esempio il metodo integrazione per parti funziona poiché il logaritmo $g(x) = \ln(x)$ è una funzione “complicata” con derivata $g'(x) = \frac{1}{x}$ “semplice”. Quindi passando la derivata da $f(x)$ a $g(x)$ l'integrale si semplifica. Inoltre possiamo dire che per $r = 0$ otteniamo $g(x) = x^0 = 1$ per ogni x e quindi abbiamo anche calcolato

$$\int \ln(x) dx = x \cdot (\ln(x) - 1) + c.$$

Se si vuole calcolare questo integrale direttamente (cioè senza il fattore x^r) si deve procedere con un piccolo trucco:

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} - \int \overbrace{\underbrace{x}_{f(x)} \cdot \frac{1}{x}_{g'(x)}}^{=1} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + c. \end{aligned}$$

- Anche l'integrale

$$\int e^x \cdot \cos(x) dx$$

si può calcolare usando integrazione per parti. Perciò scegliamo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = \cos(x)$ (ma funzionerebbe anche viceversa). Allora $f(x) = e^x$ e $g'(x) = -\sin(x)$ e quindi

$$\int \underbrace{e^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} dx = \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{g'(x)} dx.$$

Sembra che non è cambiato molto, invece il trucco è di integrare un'altra volta per parti, dove usiamo u, v invece di f, g per non confonderci

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) + \int \underbrace{e^x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} dx \\ &= e^x \cdot \cos(x) + \underbrace{e^x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} dx. \end{aligned}$$

Così siamo tornati all'integrale iniziale e a prima vista il procedimento risulta essere inutile. Invece abbiamo trovato un'equazione del tipo

$$I = E + \alpha \cdot I$$

per l'integrale I in questione con un'espressione E nota e, molto importante,

$$\alpha = -1 \neq 1.$$

Nel caso $\alpha = 1$ l'integrale si semplifica e quindi tutto era infatti inutile. Per $\alpha \neq 1$ invece l'equazione si risolve facilmente come $I = \frac{E}{1-\alpha}$ cioè (visto che qui $1 - \alpha = 2$)

$$\int e^x \cdot \cos(x) dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + c.$$

- Consideriamo

$$\int \cos^2(x) dx.$$

Allora, con $f'(x) = g(x) = \cos(x)$ otteniamo $f(x) = \sin(x)$ e $g'(x) = -\sin(x)$ e quindi

$$\int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{g'(x)} dx$$

Ora si potrebbe avere la stessa idea come nell'integrale precedente di integrare un'altra volta per parti. Ciò invece non funziona e porta soltanto all'annullamento di tutto. Invece si usa la relazione $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ che implica

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)} dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 dx - \int \cos^2(x) dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \cos^2(x) dx \end{aligned}$$

che, come prima, è un'equazione per l'integrale in questione che è facilmente da risolvere con la soluzione

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x) + x}{2} + c.$$

Integrazione per Sostituzione. Abbiamo visto come il metodo integrazione per parti segue dalla regola per la derivazione di un prodotto. Ora invece partiamo con la regola della catena (per derivare le funzioni composte) e cerchiamo la regola corrispondente per l'integrazione.

Sia $f \in C[a, b]$ con una primitiva F . Sia, inoltre $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ derivabile con continuità e $\varphi' \neq 0$. Allora la funzione composta²

$$h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) := F(\varphi(t))$$

²per non confonderci usiamo come variabili $t \in [\alpha, \beta]$ e $x \in [a, b]$.

è derivabile con

$$h'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione (*) a pagina 94 risulta la formula chiamata

- *Integrazione per Sostituzione* (versione indefinita)

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c.$$

dove F è una primitiva di f , cioè $F' = f$.

Sostituendo nella versione indefinita gli estremi $t = \beta$ e $t = \alpha$ segue dal corollario sul Teorema Fondamentale a pagina 92

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(x) \Big|_{x=\varphi(\alpha)}^{x=\varphi(\beta)} \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato la formula

- *Integrazione per Sostituzione* (versione definita)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

Prima di considerare esempi concreti deduciamo due regole generali di integrazione:

ESEMPLI. • Se nella versione indefinita della formula integrazione per sostituzione scegliamo $f(x) = \frac{1}{x}$ con la primitiva $F(x) = \ln|x|$ e per φ una funzione C^1 con $\varphi(t) \neq 0$ per ogni t allora segue

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln|\varphi(t)| + c$$

Un esempio concreto di questo tipo è

$$\begin{aligned} \int \tan(t) dt &= \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt \\ &= - \int \frac{\overbrace{-\sin(t)}^{\varphi'(t)}}{\underbrace{\cos(t)}_{\varphi(t)}} dt \\ &= - \ln|\cos(t)| + c. \end{aligned}$$

- Se nella versione indefinita della formula integrazione per sostituzione scegliamo $f(x) = x$ con la primitiva $F(x) = \frac{x^2}{2}$ e per φ una funzione C^1 allora segue

$$\int \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \frac{\varphi(t)^2}{2} + c$$

Un esempio concreto di questo tipo è

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{\varphi(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{\varphi'(t)} dt = \frac{\sin^2(t)}{2} + c.$$

OSSERVAZIONE. In pratica, si usa il metodo integrazione per sostituzione nel seguente modo: Nella funzione integranda (nella variabile t) si indovina un'espressione $\varphi(t)$ che indichiamo con x , cioè si fa la *sostituzione* $x := \varphi(t)$. Considerando x come funzione in t si deriva rispetto a t e si ottiene (formalmente)

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \varphi'(t) \cdot dt$$

Così risulta già la versione indefinita:

$$\int \underbrace{f(\varphi(t))}_{=f(x)} \cdot \underbrace{\varphi'(t) dt}_{=dx} = \int f(x) dx = F(x) + c = F(\varphi(t)) + c.$$

dove $F' = f$. Per ottenere la versione definitiva basta osservare che

- $t = \alpha \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(t) = \varphi(\alpha)$, e
- $t = \beta \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(t) = \varphi(\beta)$

cioè $t \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]^3 \iff x \in [a, b]$ e quindi

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Questo ragionamento è puramente formale, ma dimostra la forza delle notazioni per le derivate (come rapporti $\frac{df}{dx}$ tra infinitesimi) e gli integrali (come somme continue $\int f(x) dx$) inventati più di 300 anni fa da [Leibniz](#).

Vediamo ora come funziona questo procedimento in un esempio concreto:

ESEMPLI. • Calcoliamo

$$\int_1^2 t \cdot \sqrt{t-1} dt.$$

In questo caso l'idea è far sparire la radice ponendo $x := \sqrt{t-1}$ ($= \varphi(t)$). Visto che anche il fattore t nell'integrale deve essere espresso nella nuova variabile risolviamo l'equazione $x := \sqrt{t-1}$ per t :

$$x^2 = t - 1 \quad \Rightarrow \quad t = x^2 + 1.$$

Ora ci sono 2 modi per trovare la relazione tra dx e dt :

- consideriamo (come sopra indicato) $x = \sqrt{t-1}$ come funzione in t e deriviamo rispetto a t , cioè

$$\frac{dx}{dt} = \left((t-1)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot (t-1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dt = 2x \cdot dx.$$

oppure

- consideriamo $t = x^2 + 1$ come funzione in x e deriviamo rispetto a x , cioè

$$\frac{dt}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dt = 2x \cdot dx$$

e quindi le due possibilità portano allo stesso risultato. Inoltre abbiamo

- $t = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1-1} = 0$, e
- $t = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2-1} = 1$.

³se $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$, altrimenti $t \in [\varphi(\beta), \varphi(\alpha)]$

Quindi risulta

$$\begin{aligned} \int_1^2 \underbrace{t}_{x^2+1} \cdot \underbrace{\sqrt{t-1}}_x \underbrace{dt}_{2x \cdot dx} &= \int_0^1 (x^2 + 1) \cdot x \cdot 2x \cdot dx \\ &= 2 \cdot \int_0^1 (x^4 + x^2) dx \\ &= 2 \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 2 \left[\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 0 \right] = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Nell'esempio precedente si trattava di un integrale definito in t per il quale abbiamo calcolato gli estremi nella nuova variabile x . Anziché calcolare gli estremi in x , dopo la integrazione si può anche tornare alla variabile iniziale (che per integrali indefiniti è sempre necessario) e poi sostituire gli estremi originali. Così faremo nei prossimi esempi.

- Calcoliamo

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt.$$

Allora, per fare sparire la radice procediamo come prima e poniamo $x := \sqrt{t}$ cioè $t = x^2$. Ciò implica $\frac{dt}{dx} = 2x$ e quindi $dt = 2x \cdot dx$. Ora non calcoliamo gli estremi in x ma li sostituiamo con "...", intendendo che non ci interessano in questo momento. Così risulta

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt = \int_{\dots}^{\dots} e^x \cdot 2x dx.$$

Questo è un tipico integrale che si risolve per parti e quindi dobbiamo individuare chi è f' e chi g . Qui la scelta giusta è $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$ poiché se facciamo viceversa l'integrale non si semplifica ma diventa tipo $\int x^2 e^x dx$ che è ancora più difficile. Allora

$$\begin{aligned} 2 \int_{\dots}^{\dots} \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)} dx &= 2 \left(x \cdot e^x \Big|_{\dots}^{\dots} - \int_{\dots}^{\dots} 1 \cdot e^x dx \right) \\ &= 2 \left[x \cdot e^x - e^x \right]_{\dots}^{\dots} \\ (x = \sqrt{t}) \quad &= 2 \left[e^{\sqrt{t}} (\sqrt{t} - 1) \right]_1^4 \\ &= 2 \left(e^2 \cdot (2 - 1) - e^1 \cdot (1 - 1) \right) = 2 \cdot e^2. \end{aligned}$$

In questo esempio abbiamo visto che può capitare che si devono usare entrambi i metodi, cioè integrazione per sostituzione e anche integrazione per parti.

- Consideriamo ora l'integrale indefinito

$$\int \cos(\ln(t)) dt.$$

In questo esempio facciamo sparire il logaritmo ponendo $x := \ln(t)$ cioè $t = e^x$. Ciò implica

$$\frac{dt}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad dt = e^x \cdot dx.$$

Quindi otteniamo

$$\int \cos(\underbrace{\ln(t)}_x) \underbrace{dt}_{e^x \cdot dx} = \int \cos(x) \cdot e^x dx$$

l'ultimo integrale è già stato calcolato a pagina 96 usando integrazione per parti e quindi

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + c \\
 (x = \ln(t)) \quad &= e^{\ln(t)} \cdot \frac{\sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t))}{2} + c \\
 &= t \cdot \frac{(\sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t)))}{2} + c
 \end{aligned}$$

Ripetiamo che in questo esempio, come per tutti gli integrali indefiniti, dopo la sostituzione è necessario tornare alla variabile iniziale, in questo caso t .

Mentre negli esempi passati era abbastanza semplice indovinare la sostituzione (cioè trovare il $\varphi(t)$ che poi viene chiamato x) ci sono integrali dove la sostituzione è abbastanza difficile da trovare.

- Calcoliamo l'area A di un cerchio di raggio 1 data dall'equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Risolvendo l'equazione nel primo quadrante si ottiene $y = \sqrt{1 - x^2}$ e per simmetria segue

$$A = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

Con la sostituzione $x := \sin(t)$ cioè $t = \arcsin(x)$ segue

- $\frac{dx}{dt} = \cos(t) \Rightarrow dx = \cos(t) \cdot dt$,
- $x = 0 \Rightarrow t = \arcsin(0) = 0$,
- $x = 1 \Rightarrow t = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

Visto che per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vale $\cos(t) \geq 0$ risulta $\cos(t) = +\sqrt{1 - \sin^2(t)}$ e quindi

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\sqrt{1 - \sin^2(t)}}^{=\cos(t)} \cdot \cos(t) \cdot dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt.
 \end{aligned}$$

Abbiamo calcolato questo integrale già a pagina 96

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\sin(t) \cdot \cos(t) + t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Quindi risulta

$$A = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Nella stessa maniera si può verificare che l'area $A(r)$ di un cerchio di raggio $r \geq 0$ è data da

$$A(r) = \pi \cdot r^2.$$

- Calcoliamo

$$\int \arctan(x) dx$$

Allora visto che $\arctan(x)$ (come anche $\ln(x)$) è una funzione "complicata" con una derivata $\frac{1}{1+x^2}$ molto più semplice, l'idea per risolvere questo integrale é usare

integrazione per parti. Perciò useremo il trucco di inserire il fattore 1 che abbiamo già usato per integrare il logaritmo $\ln(x)$ (cfr. pagina 95):

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g(x)} dx \\ &= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'(x)} dx \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{2x}^{\varphi'(x)}}{\underbrace{1+x^2}_{\varphi(x)}} dx \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c, \end{aligned}$$

dove per l'ultimo integrale abbiamo usato la formula a pagina 97. Altrimenti si potrebbe anche utilizzare la sostituzione $t := 1 + x^2$ e procedere come negli altri esempi.

OSSERVAZIONE. Gli esempi che abbiamo visto dimostrano chiaramente che integrare una funzione può essere difficile ed impegnativo mentre in confronto derivare è una semplice procedura che si può fare abbastanza meccanicamente. In effetti ci sono funzioni continue (che quindi, per il teorema fondamentale, possiedono una primitiva) composizione di funzioni elementari tali che le primitive non possono essere espresse usando solo funzioni elementari.

Per esempio

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\pm x^2}$$

sono continue (infatti C^∞) ma le loro primitive *non* si possono esprimere utilizzando solo le funzioni che abbiamo incontrati finora. Quindi in un certo senso non si possono calcolare

$$\int e^{x^2} dx \quad \text{e} \quad \int e^{-x^2} dx$$

e questo fatto dimostra che integrare *esplicitamente* una funzione può essere addirittura impossibile.

ESEMPIO. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{s^2}) ds}{\sin(x^3)} =: l.$$

SOLUZIONE. Come indicato sopra non possiamo calcolare l'integrale. Però, grazie alle Regole di l'Hospital e il Teorema Fondamentale del calcolo integrale ciò non è neanche necessario! Prima di derivare sostituiamo $\sin(x^3)$ con l'espressione x^3 che è asintotica per $x \rightarrow 0$ e possiede derivate molto più semplici. Quindi, per il principio di sostituzione, vale

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{s^2}) ds}{x^3} \quad \left(= \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Integrazione di Funzioni Razionali

PROBLEMA. Come si integra una funzione razionale $\frac{p(x)}{q(x)}$ per due polinomi p, q , per esempio

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 10}{x^2 - 3x + 2} dx \quad ?$$

A questo problema c'è sempre una soluzione che inoltre coinvolge soltanto i tre integrali notevoli per x^r con $r \neq -1$, x^{-1} e $\frac{1}{1+x^2}$. Il problema è scomporre la funzione integranda in maniera tale si possono utilizzare tali integrali. Si procede in 3 passi:

1° passo: Se $\text{grado}(p) \geq \text{grado}(q)$, allora dividiamo p per q con resto ottenendo polinomi s e r con

- $p = s \cdot q + r$,
- $\text{grado}(r) < \text{grado}(q)$,

cioè

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Per esempio per $p(x) = x^4 - 2x^2 + 10$ e $q(x) = x^2 - 3x + 2$ otteniamo

$$\begin{array}{r} (x^4 - 2x^2 + 10) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 + 3x + 5 + \frac{9x}{x^2 - 3x + 2} \\ \underline{-x^4 + 3x^3 - 2x^2} \\ 3x^3 - 4x^2 \\ \underline{-3x^3 + 9x^2 - 6x} \\ 5x^2 - 6x + 10 \\ \underline{-5x^2 + 15x - 10} \\ 9x \end{array}$$

2° passo: Usando la linearità dell'integrale si ottiene

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \underbrace{\int s(x) dx}_{\text{semplice da calcolare}} + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 10}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int x^2 + 3x + 5 dx + \int \frac{9x}{x^2 - 3x + 2} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x + \int \frac{9x}{x^2 - 3x + 2} dx. \end{aligned}$$

3° passo: Si calcola

$$\int \frac{r(x)}{q(x)} dx.$$

Consideriamo soltanto il caso $\text{grado}(q) = 2$ cioè $q(x) = ax^2 + bx + c$, $r(x) = dx + e$.

Ci sono 3 casi secondo il segno del discriminante di $q(x)$:

- (i) $b^2 - 4ac > 0$, cioè $q(x)$ ha due zeri reali distinti x_1, x_2 .
- (ii) $b^2 - 4ac = 0$, cioè $q(x)$ ha soltanto uno zero reale x_0 .
- (iii) $b^2 - 4ac < 0$, cioè $q(x)$ non ha zeri reali.

Caso (i): I due zeri distinti di $q(x)$ sono date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{r(x)}{q(x)} dx = A \cdot \ln|x - x_1| + B \cdot \ln|x - x_2| + c.$$

L'esempio precedente con $q(x) = x^2 - 3x + 2$ entra proprio in questo caso: Qui abbiamo

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = 1 \text{ opp. } 2.$$

Inoltre $r(x) = 9x$ e quindi cerchiamo costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{9 \cdot x - 0}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B) \cdot x - (2A+B)}{(x-1) \cdot (x-2)}.$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\begin{cases} A+B=9 \\ 2A+B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-9 \\ B=18 \end{cases}$$

e quindi otteniamo

$$\frac{9x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-9}{x-1} + \frac{18}{x-2} \Rightarrow \int \frac{9x}{x^2 - 3x + 2} dx = -9 \cdot \ln|x-1| + 18 \cdot \ln|x-2| + c.$$

Così risulta

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 10}{x^2 - 3x + 2} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x - 9 \cdot \ln|x-1| + 18 \cdot \ln|x-2| + c.$$

Caso (ii): L'unico zero di $q(x)$ è dato da

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} \Rightarrow \int \frac{r(x)}{q(x)} dx = A \cdot \ln|x-x_0| - \frac{B}{x-x_0} + c.$$

Come esempio concreto consideriamo l'integrale

$$\int \frac{3x}{x^2 - 2x + 1} dx.$$

Allora il denominatore si annulla se e solo se

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = 1 = x_0.$$

Quindi cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{3 \cdot x + 0}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A \cdot x + (B-A)}{(x-1)^2}$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\begin{cases} A=3 \\ B-A=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=3 \\ B=3 \end{cases}$$

e quindi otteniamo

$$\frac{3x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} \Rightarrow \int \frac{3x}{x^2 - 2x + 1} dx = 3 \cdot \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c.$$

Caso (iii): In questo caso $q(x)$ non ha zeri reali. Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A \cdot q'(x)}{q(x)} + \frac{B}{q(x)} \Rightarrow \int \frac{r(x)}{q(x)} dx = A \cdot \ln|q(x)| + B \int \frac{1}{q(x)} dx,$$

dove abbiamo usato la formula $\int \frac{q'(x)}{q(x)} dx = \ln|q(x)|$ (cfr. pagina 97). Rimane da calcolare l'integrale

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Per fare ciò si cercano costanti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$q(x) = ax^2 + bx + c = \gamma \cdot \left(1 + \left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)^2\right)$$

Usando la sostituzione

$$t := \frac{x + \alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow dx = \beta \cdot dt$$

risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{q(x)} &= \int \frac{dx}{\gamma \cdot \left(1 + \left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)^2\right)} \\ &= \frac{\beta}{\gamma} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \arctan(t) + c \\ &= \frac{\beta}{\gamma} \cdot \arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + c. \end{aligned}$$

Riassumendo, in questo caso otteniamo

$$\int \frac{r(x)}{q(x)} dx = A \cdot \ln|q(x)| + \frac{\beta \cdot B}{\gamma} \cdot \arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + c.$$

dove

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A \cdot q'(x) + B}{q(x)} \quad \text{e} \quad q(x) = \gamma \cdot \left(1 + \left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)^2\right).$$

Come esempio concreto consideriamo l'integrale

$$\int \frac{4x}{x^2 - 4x + 13} dx.$$

Visto che il discriminante del denominatore $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 13 < 0$ siamo nel terzo caso. Allora, cerchiamo prima $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{4 \cdot x + 0}{x^2 - 4x + 13} \stackrel{!}{=} \frac{A \cdot \overbrace{(x^2 - 4x + 13)'}^{=2x-4} + B}{x^2 - 4x + 13} = \frac{2A \cdot x + (-4A + B)}{x^2 - 4x + 13}.$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\begin{cases} 2A = 4 \\ -4A + B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = 8 \end{cases}$$

e quindi

$$\int \frac{4x}{x^2 - 4x + 13} dx = 2 \cdot \ln(x^2 - 4x + 13) + 8 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx.$$

Inoltre vale

$$x^2 - 4x + 13 = (x - 2)^2 + 9 = 9 \cdot \left(1 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right)$$

cioè $\alpha = 2$, $\beta = 3$ e $\gamma = 9$ e così con la sostituzione $t := \frac{x-2}{3} \Rightarrow dx = 3dt$ risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx &= \frac{1}{9} \cdot \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{3}{9} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \cdot \arctan(t) + c \\ &= \frac{1}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

Riassumendo otteniamo il risultato finale

$$\int \frac{4x}{x^2 - 4x + 13} dx = 2 \cdot \ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{8}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + c.$$

- ALTRI ESEMPI.**
- Calcolare $\int_0^1 \frac{2}{\cosh(x)} dx$ (Sost. $e^x = t$).
 - Calcolare $\int \frac{2}{\sinh(x)} dx$. (Sost. $e^x = t$).

Calcolo di Aree Piane

Ricordiamo che per una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile

$$\int_a^b f(x) dx = \text{area tra il grafico di } f \text{ e l'asse } x,$$

dove, però, l'area sotto l'asse x è *negativa*. Quindi per calcolare l'area A di una funzione che assume sia valori positivi sia negativi si deve dividere il dominio in sottointervalli in cui $f(x)$ non cambia segno:

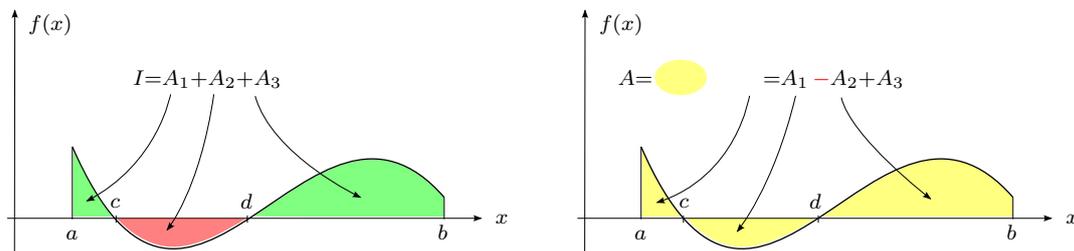


FIGURA 58. Calcolo di aree.

Quindi in questo esempio vale

$$I = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{mentre}$$

$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

Più in generale, se vogliamo determinare l'area A compresa tra i grafici di due funzioni $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili, cfr. Figura 59, allora

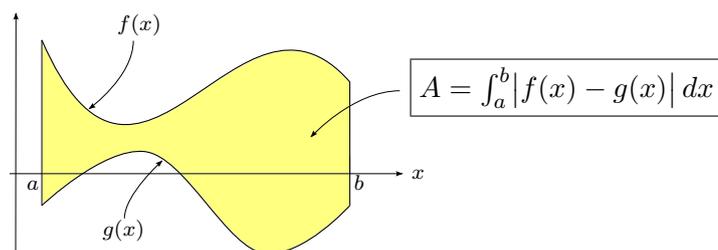


FIGURA 59. Calcolo dell'area tra due grafici.

ESEMPIO. Calcolare l'area A compresa tra i grafici di x^2 e \sqrt{x} per $x \in [0, 1]$, cfr. Figura 60. Allora, visto che $x^2 \leq \sqrt{x}$ per $x \in [0, 1]$ abbiamo

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Se invece i grafici si intersecano, allora bisogna calcolare le ascisse dei punti di intersezione e poi spezzare il dominio di integrazione come sopra.

ESEMPIO. Calcolare l'area A tra i grafici di $f(x) := x^3 - 2x$ e $g(x) := x^2$, cfr. Figura 61.

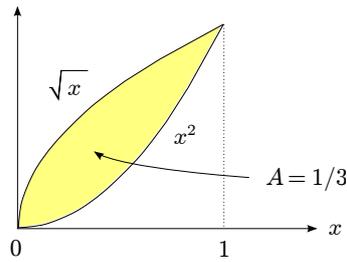


FIGURA 60. Esempio: Calcolo dell'area tra due grafici.

SOLUZIONE. Per cominciare dobbiamo calcolare i punti di intersezione tra f e g . Allora

$$x^3 - 2x = x^2 \iff 0 = x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (x^2 - x - 2) \iff x = -1, 0, 2.$$

Inoltre vale

$$f(x) = x^3 - 2x \geq g(x) = x^2 \iff x \in [-1, 0] \cup [2, +\infty)$$

e quindi

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 |(x^3 - 2x) - x^2| dx = \int_{-1}^0 ((x^3 - 2x) - x^2) dx + \int_0^2 (x^2 - (x^3 - 2x)) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(0 - \left(\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} \right) \right) + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + 2^2 \right) \\ &= \frac{37}{12} \quad \square \end{aligned}$$

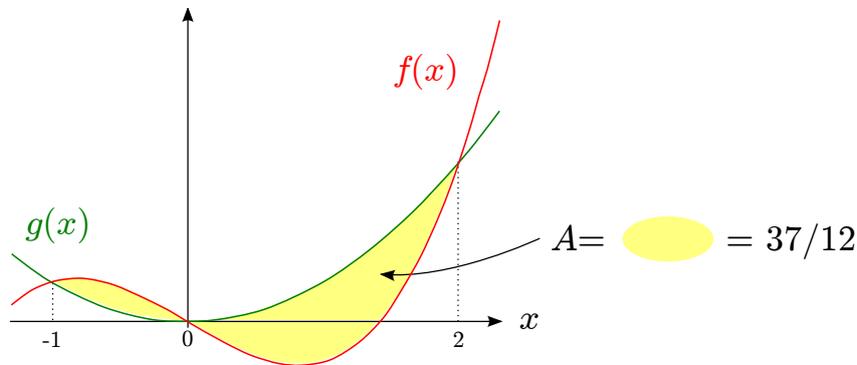


FIGURA 61. Esempio: Calcolo dell'area tra due grafici.

Calcolo della Lunghezza di una Curva*

L'idea per calcolare la lunghezza di una curva è di scomporla in segmenti di lunghezza infinitesime e poi di sommare questi infinitesimi usando l'integrale per ottenere la lunghezza cercata. Mentre il caso generale viene trattato in Analisi 2, qui consideriamo soltanto curve che sono date da un grafico di una funzione $f \in C^1[a, b]$. Allora, dalla Figura 62 segue per il teorema di Pitagora che la lunghezza del segmento infinitesimale dl è data da $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Visto che $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ "segue"⁴ $dy = f'(x) \cdot dx$ e quindi

$$dl = \sqrt{dx^2 + (f'(x))^2 \cdot dx^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx.$$

⁴Ricordiamo che questi conti sono puramente formali ma portano, grazie ad una notazione ingegnosa, ad un risultato giusto.

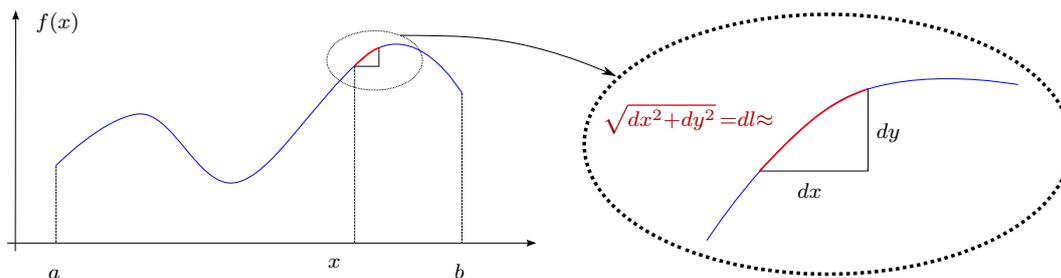


FIGURA 62. Lunghezza di una curva.

Sommando le lunghezze di questi segmenti infinitesimi, per x tra a e b , otteniamo la formula

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

per la lunghezza della curva data dal grafico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che è derivabile con continuità.

ESEMPIO. Calcoliamo la lunghezza l della curva data dal grafico di $f(x) = \cosh(x)$ per $x \in [a, b]$ (cfr. la catenaria, pagina 33). Allora $1 + (f'(x))^2 = 1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$. Visto che $\cosh(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$l = \int_a^b \sqrt{\cosh^2(x)} dx = \int_a^b \cosh(x) dx = \sinh(b) - \sinh(a).$$

Calcolo di Volumi di Corpi di Rotazione*

L'idea utilizzata nel paragrafo precedente di scomporre una quantità cercata in parti infinitesime e poi di sommarli usando l'integrale per trovare il risultato si può anche usare per calcolare il volume V di un solido. Più precisamente, l'idea è di scomporre il solido in sezioni di spessore infinitesimale e poi di sommare queste sezioni usando l'integrale per ottenere il volume cercato. Mentre il caso generale viene trattato in Capitolo 10, qui consideriamo soltanto corpi ottenuti facendo ruotare intorno all'asse x il grafico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (cfr. Figura 63).

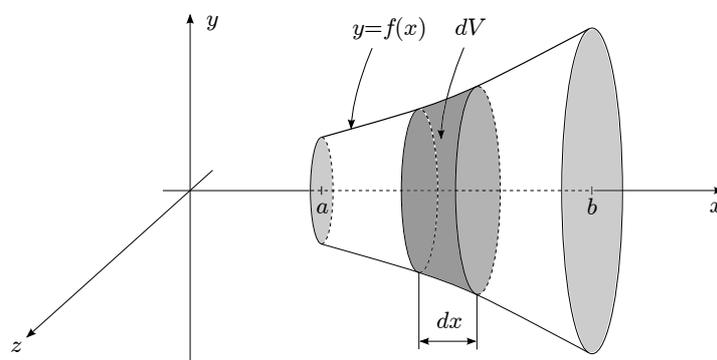


FIGURA 63. Corpo di rotazione.

Allora, usando il fatto che l'area di un cerchio di raggio $r \geq 0$ è data da $A(r) = \pi \cdot r^2$ (cfr. pagina 100) otteniamo

$$dV = \pi \cdot f^2(x) \cdot dx = \text{volume della sezione}$$

e quindi risulta

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

ESEMPLI. • Calcoliamo il Volume di un cono di altezza h e raggio r della base.

Allora $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$ per $x \in [0, h]$ e quindi

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}.$$

• Calcoliamo il Volume di una sfera di raggio r .

Allora $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e quindi

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^r = 2\pi \cdot \left(r^2 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3.$$

Integrali Impropri

Ricordiamo che finora un'integrale definito rappresenta un'area A tra l'asse x ed il grafico

- di una *funzione integranda f limitata*,
- su un *dominio di integrazione $[a, b]$ limitato*.

Questo significa che al momento non abbiamo definito integrali del tipo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{funzione integranda } \textit{non} \text{ limitata})$$

oppure

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{dominio di integrazione } [0, +\infty) \textit{ non} \text{ limitato})$$

cfr. Figura 64.

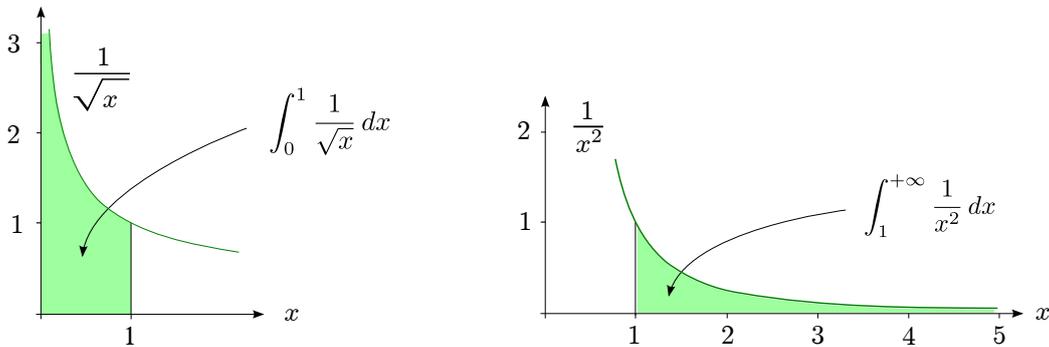


FIGURA 64. Integrali impropri.

Però con il concetto di limite è semplice eliminare questi due vincoli.

DEFINIZIONE 6.8 (Integrale Improprio). Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che f è integrabile in $[a, c]$ per ogni $a < c < b$. Allora, se converge

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx =: A$$

si dice che l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx := A \quad (= \textit{integrale improprio oppure generalizzato})$$

esiste nel senso *improprio* oppure che *converge*⁵. Una definizione analoga si ha per $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

ESEMPI. • Per $r \in \mathbb{R}$ studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} x^r dx := \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c x^r dx.$$

Convien considerare 2 casi

- $r = -1$: Allora

$$\int_1^c x^{-1} dx = \ln(x) \Big|_1^c = \ln(c) - \ln(1) \rightarrow +\infty \quad \text{per } c \rightarrow +\infty,$$

cioè l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

diverge.

- $r \neq -1$: Allora

$$\int_1^c x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \Big|_1^c = \frac{c^{r+1}}{r+1} - \frac{1}{r+1} \quad (c \rightarrow +\infty) \begin{cases} -\frac{1}{r+1} & \text{se } r+1 < 0 \iff r < -1, \\ +\infty & \text{se } r+1 > 0 \iff r > -1. \end{cases}$$

Quindi risulta

$$\boxed{\int_1^{+\infty} x^r dx = \begin{cases} -\frac{1}{r+1} & \text{se } r < -1, \\ +\infty & \text{se } r \geq -1. \end{cases}}$$

Per esempio per $r = -2 < -1$ otteniamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{-2+1} = 1.$$

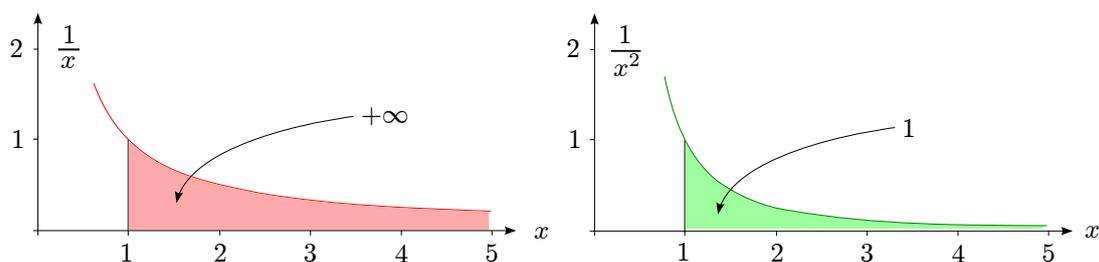


FIGURA 65. Integrali impropri.

- Consideriamo ora la stessa funzione integranda ma sul dominio di integrazione $[0, 1]$, cioè studiamo⁶

$$\int_0^1 x^r dx := \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^r dx.$$

Come prima conviene considerare 2 casi

⁵Per integrali impropri si usa lo stesso linguaggio delle serie, cioè si parla di convergenza e divergenza etc.

⁶qui il limite è solo necessario se $r < 0$.

- $r = -1$: Allora

$$\int_c^1 x^{-1} dx = \ln(x) \Big|_c^1 = \ln(1) - \ln(c) \rightarrow -(-\infty) = +\infty \quad \text{per } c \rightarrow 0^+,$$

cioè l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$$

diverge.

- $r \neq -1$: Allora

$$\int_c^1 x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \Big|_c^1 = \frac{1}{r+1} - \frac{c^{r+1}}{r+1} \xrightarrow{(c \rightarrow 0^+)} \begin{cases} \frac{1}{r+1} & \text{se } r+1 > 0 \iff r > -1, \\ +\infty & \text{se } r+1 < 0 \iff r < -1. \end{cases}$$

Quindi risulta

$$\int_0^1 x^r dx = \begin{cases} \frac{1}{r+1} & \text{se } r > -1, \\ +\infty & \text{se } r \leq -1. \end{cases}$$

Per esempio per $r = -\frac{1}{2} > -1$ otteniamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} = 2.$$

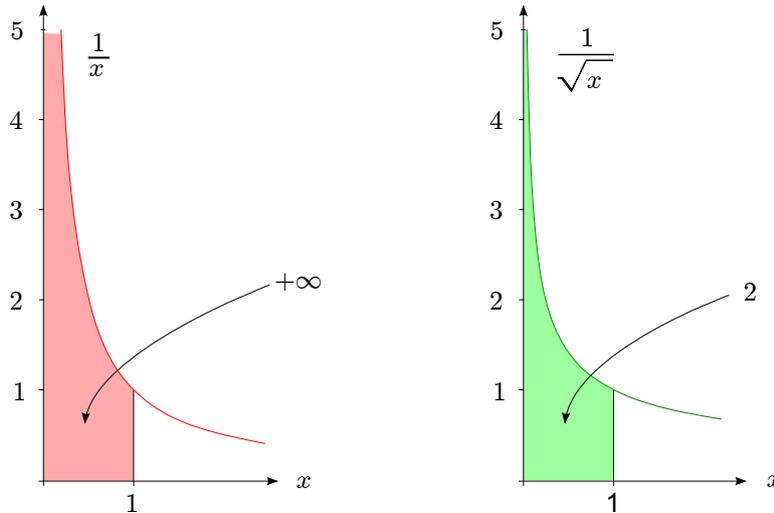


FIGURA 66. Integrali impropri.

Mentre per x^r nei due esempi precedenti era abbastanza semplice trovare una primitiva abbiamo visto che può essere difficile e addirittura impossibile integrare esplicitamente una funzione. Perciò si pone il seguente⁷

PROBLEMA. Come si può studiare la convergenza di un'integrale improprio senza conoscere una primitiva della funzione integranda?

Evidenziamo che così non chiediamo più di calcolare il valore dell'integrale ma soltanto di verificare che esiste e sia finito.

TEOREMA 6.9 (del Confronto per gli Integrali Impropri). Siano $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e tale che per ogni $a < c < b$, f, g siano integrabili su $[a, c]$. Se

⁷Questo problema è molto simile a quello che abbiamo incontrato nel capitolo sulle serie: come si può studiare la convergenza di una serie *senza* avere una formula esplicita per le somme parziali, cfr. pagina 22.

- $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b)$ (cioè g è un maggiorante di $|f|$) e
- $\int_a^b g(x) dx$ converge,

allora converge anche $\int_a^b f(x) dx$. Un risultato simile vale anche per $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$.

ESEMPI. • Consideriamo l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

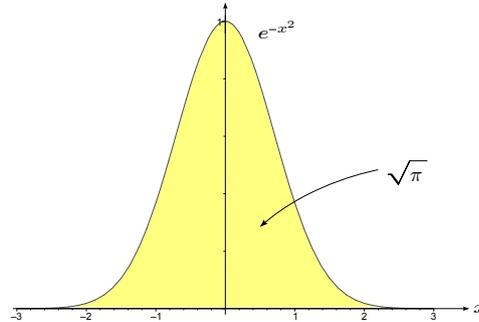


FIGURA 67. Integrale improprio della “Campana di Gauss”.

In questo caso non soltanto uno degli estremi è “critico” (nel senso che è infinito oppure un’asintoto verticale della funzione integranda) ma entrambi. In questi casi si spezza l’integrale nella somma di due integrali scegliendo un punto c tra gli estremi. Nel caso in questione per simmetria conviene scegliere il punto $c = 0$ e quindi definiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx := \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Visto che $f(x) = e^{-x^2}$ è una funzione pari, dalla proposizione su pagina 89 segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

e quindi l’integrale converge su $(-\infty, +\infty)$ se e solo se converge su $[0, +\infty)$. A questo punto ci serve una funzione maggiorante per la quale l’integrale improprio converge. Poiché

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

dove il primo integrale è un’integrale definito e quindi esiste finito, basta che tale funzione sia maggiorante soltanto per $x \geq 1$. Allora, per $x \geq 1$ vale

$$|f(x)| = e^{-x^2} \leq 2x \cdot e^{-x^2} =: g(x)$$

e

$$\begin{aligned} \int_1^c 2x \cdot e^{-x^2} dx &= - \int_1^c -2x \cdot e^{-x^2} dx \\ &= -e^{-x^2} \Big|_1^c \\ &= e^{-1} - e^{-c^2} \rightarrow e^{-1} \quad \text{per } c \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Quindi $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ converge e per il criterio del confronto converge anche $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ e di conseguenza anche $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

OSSERVAZIONE. In seguito (cfr. pagina 147) dimostreremo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- Verifichiamo che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

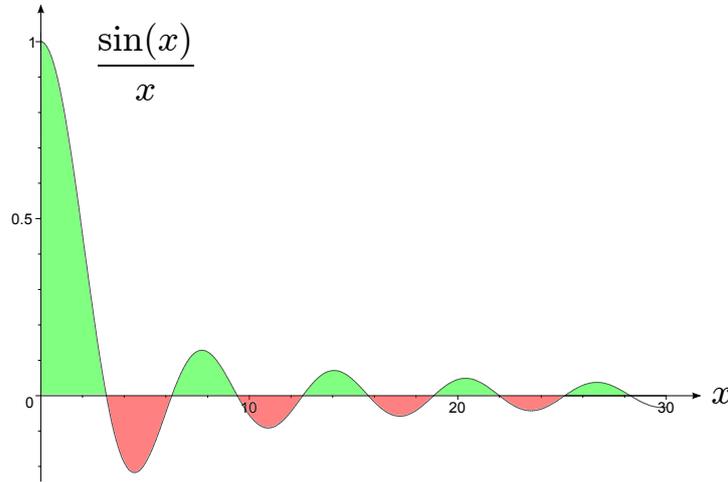


FIGURA 68. Integrale improprio convergente.

Visto che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ solo l'estremo $b = +\infty$ è "critico". Quindi l'integrale converge su $[0, +\infty)$ se e solo se converge su $[1, +\infty)$. Integrando per parti risulta

$$\begin{aligned} \int_1^c \underbrace{\frac{1}{x}}_f \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'} dx &= \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} \Big|_1^c - \int_1^c \underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_g dx \\ &= \underbrace{\cos(1) - \frac{\cos(c)}{c}}_{\rightarrow \cos(1) \text{ per } c \rightarrow +\infty} - \int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale converge se e solo se

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

converge. Ora è semplice trovare un maggiorante per il quale converge l'integrale improprio. Infatti

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{converge}$$

(vedi pagina 109). Quindi anche l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

converge. Notiamo che qui era necessario

- integrare una volta per parti (aumentando così il grado del denominatore da x a x^2) visto che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty \quad \text{diverge}$$

- considerare l'integrale su $[1, +\infty)$ e non su $[0, +\infty)$ visto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty \quad \text{diverge.}$$

Concludiamo questo capitolo con alcune osservazioni su

Integrali Impropri e Serie. Spesso gli elementi di una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sono dati dai valori di una funzione $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in $x = k$, cioè

$$a_k = f(k), \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

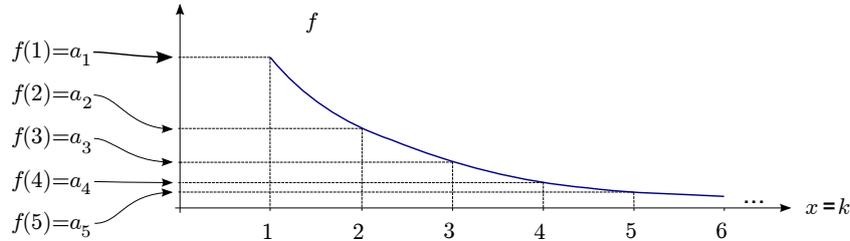


FIGURA 69. Integrali impropri e serie: $f(k) = a_k$.

Quindi si può chiedere che legame c'è tra

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Interpretando la somma della serie come area dimostreremo il seguente

TEOREMA 6.10 (Criterio Integrale per le Serie). Se $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è decrescente e $a_k := f(k)$, allora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}.$$

DIMOSTRAZIONE. “ \Rightarrow ”: Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora dal seguente grafico segue

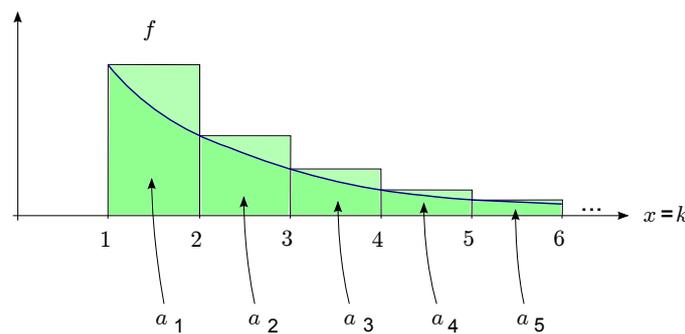


FIGURA 70. La serie maggiore l'integrale.

$$F(c) := \int_1^c f(s) ds \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{per ogni } c \geq 1.$$

Inoltre, F è crescente e quindi per il teorema su pagina 39 converge

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

“ \Leftarrow ”: Se invece l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge, allora dal grafico segue

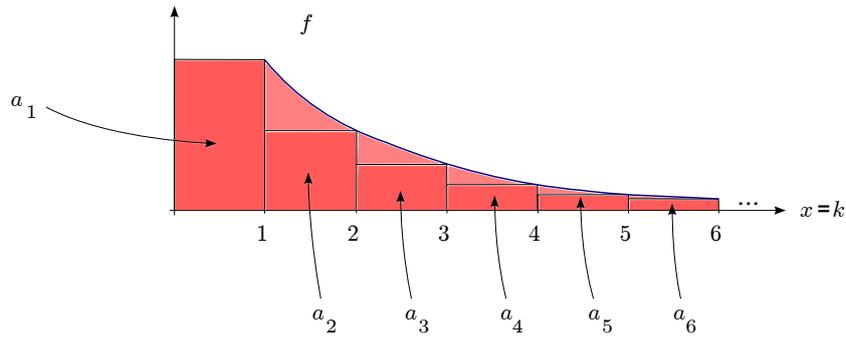


FIGURA 71. L'integrale maggiora la serie.

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x) dx \quad \text{per ogni } n = 1, 2, 3, \dots$$

Inoltre la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è a termini positivi e quindi convergente per il teorema su pagina 22. □

ESEMPIO. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, cfr. pagina 24. Allora per $\alpha \leq 0$ la successione $(\frac{1}{k^\alpha})_{n \geq 1}$ non è infinitesima e quindi la serie diverge a $+\infty$. Se invece $\alpha > 0$, allora la funzione $f(x) = x^{-\alpha}$, $x \geq 1$, è derivabile con

$$f'(x) = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} < 0 \quad \text{per ogni } x \geq 1.$$

Quindi f è decrescente e dal Criterio Integrale per le Serie segue che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

dove la seconda equivalenza è stata dimostrata su pagina 109 con $r = -\alpha$.

Quindi possiamo definire la funzione

$$\zeta : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta(s) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

che si chiama la *funzione zeta di Riemann* ed è legato all'*ipotesi di Riemann*, uno dei problemi aperti più importanti della matematica.

Funzioni Reali di Più Variabili: limiti e continuità

In questo capitolo consideriamo funzioni reali di più variabili reali, cioè funzioni definite in un sottoinsieme di \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, a valori reali. Per prima cosa diamo uno “sguardo” all’insieme ambiente, cioè consideriamo delle proprietà di \mathbb{R}^N che ne definiscono la struttura.

La Struttura di \mathbb{R}^N

È ben noto (cfr. il corso di Geometria) che l’insieme

$$\mathbb{R}^N := \{(x_1, \dots, x_N) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}$$

delle N -uple ordinate di numeri reali è uno *spazio vettoriale* sul campo dei numeri reali con le ordinarie operazioni di *somma tra vettori* e *moltiplicazione per uno scalare*, cioè

- $(x_1, \dots, x_N) + (y_1, \dots, y_N) = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N)$,
- $\alpha \cdot (x_1, \dots, x_N) = (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_N)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dal nostro punto di vista identificheremo il vettore (x_1, \dots, x_N) con il punto dello spazio Euclideo N -dimensionale con le corrispondenti coordinate.

Introduciamo su \mathbb{R}^N una *norma*, cioè un modo di misurare la lunghezza dei vettori, definendo

$$\|(x_1, \dots, x_N)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Per il teorema di Pitagora è immediato vedere che $\|(x_1, \dots, x_N)\|$ misura la lunghezza del vettore posizione che congiunge l’origine al punto di coordinate (x_1, \dots, x_N) .

La norma soddisfa le seguenti proprietà: per ogni $(x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\|(x_1, \dots, x_N)\| \geq 0$ e $\|(x_1, \dots, x_N)\| = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_N) = (0, \dots, 0)$,
- $\|\alpha \cdot (x_1, \dots, x_N)\| = |\alpha| \cdot \|(x_1, \dots, x_N)\|$,
- $\|(x_1, \dots, x_N) + (y_1, \dots, y_N)\| \leq \|(x_1, \dots, x_N)\| + \|(y_1, \dots, y_N)\|$ (*disuguaglianza triangolare*).

OSSERVAZIONE. È interessante osservare che per $N = 1$, la definizione di norma si riduce a quella di modulo (cfr. pagina 4). Infatti, per $x \in \mathbb{R}$, $(x^2)^{1/2} = |x|$ e quindi $\|x\| = |x|$.

A partire dalla definizione di norma si può introdurre il concetto di *distanza* tra punti di \mathbb{R}^N definendo la distanza di (x_1, \dots, x_N) da (y_1, \dots, y_N) come la norma (lunghezza) del vettore congiungente i due punti, cioè

$$\|(x_1, \dots, x_N) - (y_1, \dots, y_N)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}.$$

Osserviamo infine che per $N = 2$ o $N = 3$, piuttosto che utilizzare le notazioni (x_1, x_2) e (x_1, x_2, x_3) , è più comodo utilizzare le notazioni senza indici (x, y) e (x, y, z) .

Funzioni Reali di più Variabili Reali: Prime Proprietà

DEFINIZIONE 7.1. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ si dice *funzione reale di più variabili reali*.

ESEMPI (di funzioni di più variabili reali). • $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + xyz + zy + z^2x^2$ (polinomio nelle variabili x, y, z di grado 4).

- $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Si noti che in questo caso il dominio di f è l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, cioè il cerchio di centro l'origine e raggio 1.
- $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - y^2)}$. Si disegni per esercizio il suo dominio X .

Abbiamo visto nei precedenti capitoli che si può visualizzare una funzione reale f di una variabile disegnandone il suo grafico cartesiano in \mathbb{R}^2 . Si osservi che il grafico

$$G(f) = \left\{ (x_1, \dots, x_N, f(x_1, \dots, x_N)) : (x_1, \dots, x_N) \in X \right\}$$

di una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{N+1} . Quindi il grafico di una funzione si può visualizzare soltanto se essa è definita in $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ oppure \mathbb{R}^2 !

ESEMPI (di grafici in \mathbb{R}^3).

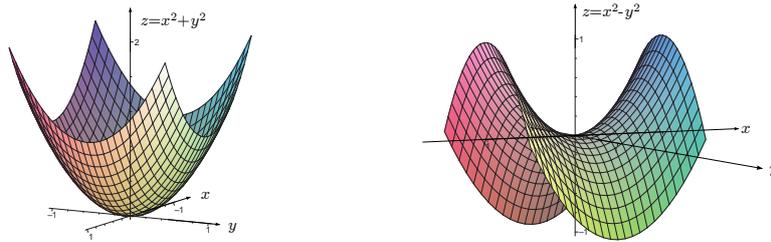


FIGURA 72. Grafici di $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ e $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ per $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Un altro modo per visualizzare le funzioni di più variabili sono le *curve (o linee) di livello*: Data $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, si definisce curva di livello c di f l'insieme

$$\Gamma_c := \{x \in X : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^N.$$

Esempi concreti sono le isobare in una mappa meteorologica oppure le curve di livello in una mappa topografica. Si nota che per alcuni valori di c le curve di livello corrispondenti possono essere l'insieme vuoto.

ESEMPI (di curve di livello in \mathbb{R}^2).

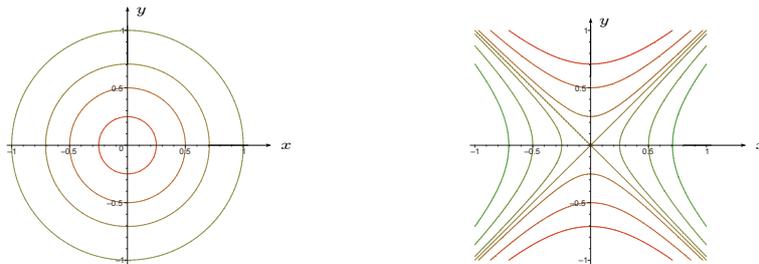


FIGURA 73. Linee di livello Γ_c delle funzioni $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ per $c = 0, 1/16, 1/4, 1/2, 1$ e $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ per $c = -1, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 1$ con $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Un vantaggio delle curve di livello rispetto ai grafici cartesiani è che, essendo definite nello stesso spazio \mathbb{R}^N dove è definita la funzione, consentono di “guadagnare” una dimensione. Infatti, mentre non possiamo visualizzare il grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ne possiamo visualizzare le sue curve (o, meglio, superfici) di livello essendo sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 .

ESEMPIO.

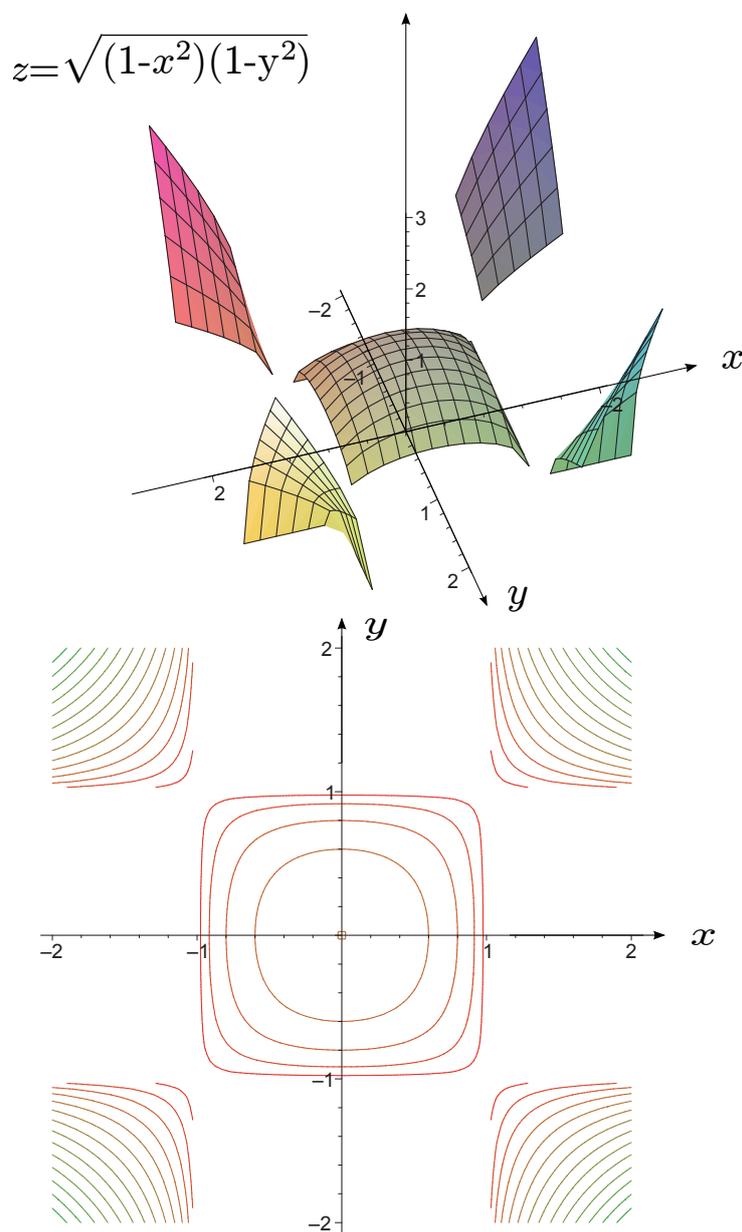


FIGURA 74. Grafico di $f(x, y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ e le linee di livello Γ_c per $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ e $c = 0, 0.2, 0.4, \dots, 2.6, 2.8, 3$.

Limiti di Funzioni Reali di più Variabili Reali

L'idea che seguiremo per introdurre la definizione di limite in \mathbb{R}^N è molto simile a quella seguita in \mathbb{R} (in fondo basta sostituire il modulo con la norma) ed è basata sull'uso delle successioni approssimanti il punto in cui vogliamo calcolare il limite.

DEFINIZIONE 7.2 (*Limiti per i vettori*). Data una successione di vettori $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$, diremo che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x_0 \in \mathbb{R}^N$ se $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. In questo caso scriviamo

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0} \quad \text{oppure} \quad \boxed{x_n \rightarrow x_0 \text{ per } n \rightarrow +\infty}.$$

Se $x_n = (x_1^n, \dots, x_N^n) \in \mathbb{R}^N$, allora è facile verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ in } \mathbb{R}^N \quad \iff \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^n = x_i^0 \text{ in } \mathbb{R} \text{ per ogni } i = 1, \dots, N.$$

Cioè una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di vettori converge se e solo se converge componente per componente al vettore x_0 .

Con la definizione precedente di convergenza per una successione di punti (vettori) di \mathbb{R}^N , possiamo estendere facilmente le definizioni date in \mathbb{R} .

DEFINIZIONE 7.3. Un punto $c \in \mathbb{R}^N$ si dice *punto di accumulazione* dell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}^N$ se esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ con

- $x_n \in X$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $x_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$.

DEFINIZIONE 7.4 (*Limiti per le Funzioni*). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di più variabili reali e sia $c \in \mathbb{R}^N$ un punto di accumulazione di X . Allora diremo che

f tende a l $\in \mathbb{R}$ per *x tendente a c*

se per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$ segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$.

In questo caso scriveremo

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l} \quad \text{oppure} \quad \boxed{f(x) \rightarrow l \text{ per } x \rightarrow c}.$$

OSSERVAZIONI. • Si osservi che la definizione di limite per funzioni di più variabili può essere data solo per $c \in \mathbb{R}^N$, cioè al finito, poiché, a differenza di \mathbb{R} , non essendoci un ordinamento naturale in \mathbb{R}^N non si può definire una direzione privilegiata secondo cui raggiungere ∞ in \mathbb{R}^N

- Il concetto di limite per le funzioni come definito sopra si basa su quello del limite per le successioni. Come nel caso di una variabile esiste anche un'altra possibilità di introdurre limiti per le funzioni di più variabili che non fa riferimento alle successioni:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - l| < \varepsilon \forall x \in X \text{ con } \|x - c\| < \delta$$

- La definizione di limite in \mathbb{R}^N conserva molte delle proprietà di quella in \mathbb{R} . In particolare valgono i seguenti risultati
 - (i) unicità del limite;
 - (ii) le Regole per il calcolo dei limiti di una somma, differenza, prodotto, quoziente di funzioni (cfr. pagina 37).

Calcolo dei Limiti in \mathbb{R}^N

Mentre, come abbiamo visto, la definizione di limite in \mathbb{R}^N non presenta particolari difficoltà aggiuntive rispetto al caso di \mathbb{R} , il calcolo dei limiti presenta in questo caso delle difficoltà aggiuntive. Ciò è dovuto al fatto che, rispetto al caso di \mathbb{R} , possiamo avvicinarci al punto in cui vogliamo calcolare il limite da molte direzioni e modi diversi. Per semplicità ci restringeremo al caso di \mathbb{R}^2 e sempre considereremo come punto di accumulazione $(0, 0)$.

Una Condizione per la non Esistenza del Limite. Consideriamo il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Si osservi che $(0,0)$ è di accumulazione per $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dominio della funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Dato l'insieme delle rette che passano per l'origine, quindi $y = mx$ al variare di $m \in \mathbb{R}$, si consideri la restrizione di f ad una di queste rette, cioè $f(x, mx)$, e se ne calcoli il limite per $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Risulta quindi dal precedente calcolo che il limite di f per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ dipende dalla direzione scelta per avvicinarci all'origine, cioè dal parametro m , e quindi il limite *non* esiste. In altre parole, se scegliamo successioni tendenti al punto di accumulazione da direzioni diverse, i corrispondenti valori limite saranno diversi in contraddizione con la definizione di limite.

PROPOSIZIONE 7.5 (*Condizione necessaria*). *Affinché il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ esista è necessario (ma non sufficiente) che esistano e siano uguali i limiti $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$ al variare di $m \in \mathbb{R}$.*

La proposizione precedente fornisce anche un candidato $l \in \mathbb{R}$ per il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Infatti se tale limite esiste, esso deve coincidere con il limite lungo le rette.

Il seguente esempio mostra come la condizione precedente sia solo necessaria, ma non sufficiente a garantire l'esistenza del limite. Consideriamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}.$$

Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = 0 \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{R}.$$

Quindi tutti i limiti al variare di $m \in \mathbb{R}$ esistono e sono uguali. Pertanto se il limite di f esiste, deve essere uguale a 0.

Consideriamo ora la curva $y = x^2$. Tale curva passa per il punto di accumulazione $(0,0)$, quindi fornisce un altro modo per avvicinarsi ad esso. Consideriamo la restrizione di f a tale curva e calcoliamone il limite per $x \rightarrow 0$, cioè muovendoci verso il punto di accumulazione. Allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 !!$$

Quindi abbiamo trovato una curva passante per il punto di accumulazione, muovendoci lungo la quale troviamo un diverso valore del limite. Possiamo pertanto concludere che il $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *non* esiste.

OSSERVAZIONE. Le scelte della curva $y = x^2$ è stata fatta per ristabilire il rapporto omogeneo fra le variabili x e y . Infatti sia al numeratore che al denominatore il rapporto fra il grado della x e della y è 2 a 1

Concludiamo questa prima parte con un procedimento generale per dimostrare la non esistenza di un limite:

Per dimostrare la non esistenza di un limite è sufficiente trovare due curve passanti per il punto di accumulazione tali che i limiti (in una variabile) della funzione ristretta a queste curve siano diversi (o non esistono).

Una Tecnica per Dimostrare l'Esistenza del Limite. Fin qui abbiamo visto come si può dimostrare la non esistenza di un limite. Adesso vediamo come si può dimostrare l'esistenza di un limite.

Coordinate polari: Ricordiamo (cfr. corso di Geometria) che un punto P del piano, oltre che con le sue coordinate cartesiane (x, y) , può essere rappresentato con le *coordinate polari* $(\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$.

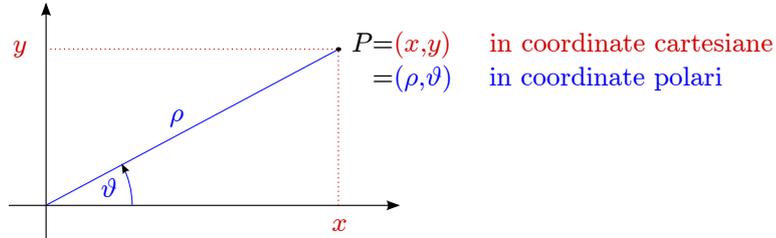


FIGURA 75. Coordinate polari.

Le formule di passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari sono date da

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Si noti che la relazione $\tan \vartheta = \frac{y}{x}$ non può essere esplicitata in quanto la funzione \tan non è invertibile in $[0, 2\pi)$. Consideriamo un esempio

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}.$$

Innanzitutto osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{R}$, quindi se il limite l esiste deve essere 0. Riscriviamo la funzione f in coordinate polari utilizzando le relazioni precedenti, cioè

$$f(x, y) = f(\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta)) = \frac{2\rho^2 \cos^2(\vartheta) \cdot \rho \sin(\vartheta)}{\rho^2} = 2\rho \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta).$$

Si ha, utilizzando $|\sin(\vartheta)|, |\cos(\vartheta)| \leq 1$,

$$|f(\rho, \vartheta) - l| = |2\rho \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta) - 0| = 2\rho |\cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)| \leq 2\rho \rightarrow 0 \quad \text{per } \rho \rightarrow 0.$$

Si noti che

$$\boxed{\rho \rightarrow 0 \quad \text{equivale a dire} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)}.$$

Quindi abbiamo maggiorato $|f(\rho, \vartheta) - l|$ con una quantità che dipende solo dalla distanza dall'origine (cioè ρ) e non dalla direzione di avvicinamento (cioè ϑ) all'origine. La proprietà precedente consente di concludere che il limite esiste e vale $l = 0$.

Riassumiamo: *Per dimostrare che*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = l$$

è sufficiente, avendo espresso la funzione in coordinate polari, ottenere una disuguaglianza del tipo

$$\left| f(\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta)) - l \right| \leq g(\rho)$$

ove la funzione $g(\rho)$ tende a 0 per $\rho \rightarrow 0$.

ESEMPIO. Si consideri

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y) + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

È facile verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 1$ per ogni $m \in \mathbb{R}$, quindi se il limite l esiste deve essere $l = 1$. Si ha $f(\rho, \vartheta) = \frac{\sin(\rho^3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)) + \rho^2}{\rho^2}$ e quindi

$$|f(\rho, \vartheta) - l| = \left| \frac{\sin(\rho^3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta))}{\rho^2} \right|$$

Se procediamo utilizzando come prima $|\sin(t)| \leq 1$ per $t \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$|f(\rho, \vartheta) - l| = \left| \frac{\overbrace{\sin(\rho^3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta))}^{\leq 1}}{\rho^2} \right| \leq \frac{1}{\rho^2} \not\rightarrow 0 \quad \text{per } \rho \rightarrow 0.$$

Quindi non possiamo concludere l'esistenza del limite. Tuttavia possiamo ricordare che $|\sin(t)| \leq |t|$ per $t \in \mathbb{R}$, quindi per $t = \rho^3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)$,

$$|f(\rho, \vartheta) - l| \leq \frac{|\rho^3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)|}{\rho^2} \leq \frac{\rho^3 \overbrace{|\cos(\vartheta) \sin(\vartheta)|}^{\leq 1}}{\rho^2} \leq \rho \rightarrow 0 \quad \text{per } \rho \rightarrow 0.$$

Continuità

Come conseguenza della definizione di limite si può dare la definizione di continuità

DEFINIZIONE 7.6 (Continuità). Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama

- *continua in* $x_0 \in X$ se per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \rightarrow x_0$ segue $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ per $n \rightarrow +\infty$;
- *continua*, se è continua in ogni $x \in X$.
- Denotiamo con $C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è continua}\}$ l'insieme delle funzioni continue su X .

Valgono molte delle osservazioni fatte nel caso di \mathbb{R} .

OSSERVAZIONI. • La continuità si può anche definire senza fare riferimento alle successioni: f è continua in $x_0 \iff$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in X$ con $\|x - x_0\| < \delta$.

- Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione di X , allora f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Se $x_0 \in X$ non è un punto di accumulazione di X (in questo caso si dice anche che x_0 è un punto isolato di X), allora f è sempre continua in x_0 .
- Somme, differenze, prodotti, rapporti e composizione di funzioni continue sono continue.

ESEMPIO. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sin(xy + x^2)$. Essa risulta continua in quanto composizione delle funzioni continue $p(x, y) = xy + x^2$ (polinomio in due variabili) e $g(t) = \sin(t)$ (funzione continua su \mathbb{R}).

Calcolo Differenziale per Funzioni Reali di più Variabili

In questo capitolo si estenderà il concetto di derivazione alle funzioni di più variabili reali. Introduciamo la definizione di *intorno circolare* di un punto in \mathbb{R}^N . Per $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, definiamo intorno (circolare) di raggio r l'insieme

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < r\}.$$

Esso rappresenta il luogo dei punti che hanno distanza minore di r da x_0 . Se $N = 1$, cioè $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, allora l'insieme $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ è dato dall'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$. In \mathbb{R}^2 esso geometricamente rappresenta il cerchio (esclusa la circonferenza) di centro x_0 e raggio r ed in \mathbb{R}^3 la sfera (esclusa la superficie sferica) di centro x_0 e raggio r .

DEFINIZIONE 8.1. Dato un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^N$, un punto x_0 si dice *interno* a X se esiste $r > 0$ tale che l'intorno $B_r(x_0) \subset X$. Inoltre X si chiama

- *aperto* se ogni $x_0 \in X$ è interno,
- *chiuso* se il complemento $\mathbb{R}^N \setminus X$ è aperto.

Se il punto è interno al dominio di una funzione, vuol dire che possiamo avvicinarci al punto da ogni direzione rimanendo all'interno del dominio.

I Concetti di Derivabilità in \mathbb{R}^N

Mentre per le funzioni reali di una variabile esiste soltanto un concetto di derivabilità scopriremo in seguito che per funzioni di più variabili la situazione è più complicata.

Derivate Parziali e Derivabilità. Una prima generalizzazione del concetto di derivata è data dalla seguente

DEFINIZIONE 8.2. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0) \in X$ un punto interno di X . Se, dato $i \in \{1, \dots, N\}$ converge

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \dots, x_N^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_N^0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile parzialmente rispetto* x_i in x_0 con *derivata parziale* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Altre notazioni: $f_{x_i}(x_0) = D_{x_i}f(x_0)$.

OSSERVAZIONE. Per $N = 2$, abbiamo la derivate parziali rispetto x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

e rispetto y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

OSSERVAZIONE. Per spiegare il significato delle derivate parziali consideriamo il caso $N = 2$. La derivata parziale rispetto x corrisponde a fare la derivata ordinaria (cioè rispetto una variabile) della funzione $g(x) := f(x, y_0)$ che è la restrizione di f alla retta $y = y_0$, cfr. Figura 76.

Quindi $f_x(x_0, y_0)$ fornisce informazioni sulla crescita/decrecenza di f lungo la retta $y = y_0$ nell'intorno del punto (x_0, y_0) . Un'interpretazione analoga vale per $f_y(x_0, y_0)$.

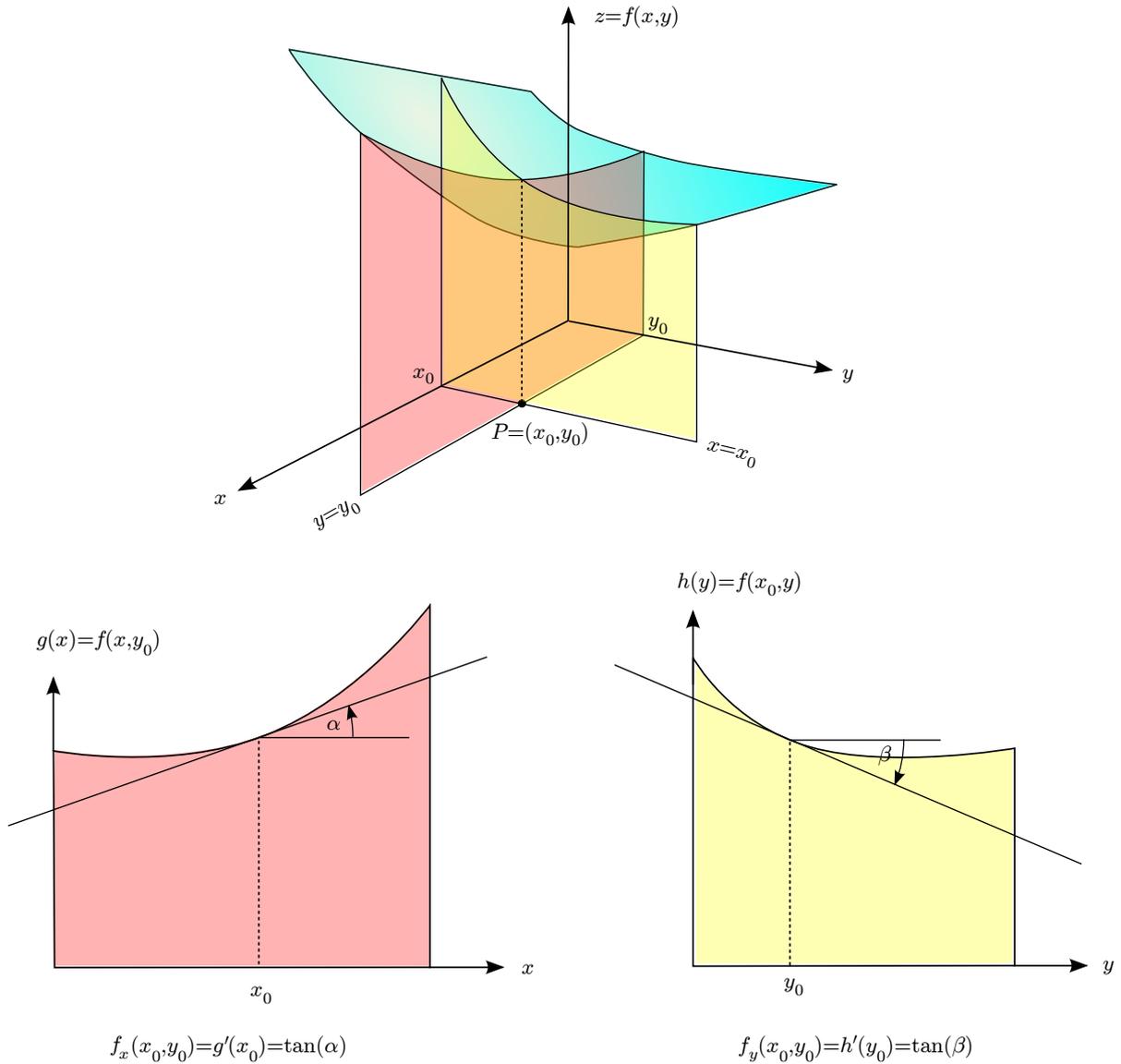


FIGURA 76. Derivate parziali.

OSSERVAZIONE. Per calcolare le derivate parziali di una funzione, se le funzioni che la compongono sono derivabili, è sufficiente derivare in maniera ordinaria, considerando le altre variabili come costanti. Ad esempio

- Se $f(x, y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2y + 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3 - 2y + 3x$
- Se $f(x, y) = e^{xy} + y^2$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2y$
- Se $f(x, y, z) = \cos(xyz)$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -yz \sin(xyz)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -xz \sin(xyz)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -xy \sin(xyz)$

Se però le funzioni che intervengono non sono derivabili, bisogna passare attraverso la definizione di derivate parziale. Sia $f(x, y) = |x|y$, allora in un punto del tipo $(0, y)$, non possiamo derivare direttamente rispetto x , ma dobbiamo passare attraverso la definizione

$$f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|y}{h} = \begin{cases} \nexists & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

DEFINIZIONE 8.3. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ interno a X . Se f è derivabile parzialmente rispetto x_i in x_0 per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, allora f si dice *derivabile* (parzialmente)

in x_0 . In tal caso si può definire il vettore delle derivate parziali

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^N$$

Tale vettore si chiama *gradiente* di f in x_0 . Inoltre si usano anche le notazioni $Df(x) =: \text{grad } f(x) =: \nabla f(x)$ “nabla di f ”.

ESEMPIO. Se $f(x, y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, allora $Df(x, y) = (6x^2y + 3y, 2x^3 - 2y + 3x)$.

OSSERVAZIONE. Avendo dato una definizione di derivabilità è naturale chiedersi se essa gode delle stesse proprietà del caso unidimensionale. Il seguente esempio mostra che non è così!! Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Abbiamo verificato (cfr. pagina 119) che tale funzione non ammette limite e quindi non è continua in $(0, 0)$. Tuttavia in $(0, 0)$ esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Questa osservazione ci porta a concludere che la precedente definizione di derivabilità non è la corretta generalizzazione di quella unidimensionale. Si osservi che d'altra parte la continuità non implica la derivabilità, poiché ad esempio la funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$ è continua, ma non è derivabile in $(0, 0)$.

Per trovare la giusta generalizzazione del concetto di derivabilità dal caso unidimensionale a quello di più variabili ricordiamo che per una funzione reale $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ di una variabile le seguenti affermazioni sono equivalenti, cfr. pagina 64.

- (a) f è derivabile in x_0 , cioè $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ converge.
 (b) Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$ e in quel caso $A = f'(x_0)$.

Differenziabilità. Abbiamo visto che generalizzando la prima proprietà sulla convergenza dei rapporti incrementali non si ottiene una proprietà soddisfacente in \mathbb{R}^N . Nella prossima definizione seguiamo il secondo approccio.

DEFINIZIONE 8.4. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ un punto interno di X . Se esiste un vettore $A \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

allora f si dice *differenziabile* in x_0 (il simbolo “ \cdot ” denota in questo caso il prodotto scalare tra vettori in \mathbb{R}^N).

OSSERVAZIONI. • Se f è differenziabile in x_0 , allora risulta che f è anche derivabile in x_0 e $A = Df(x_0)$. Quindi si ha

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

In particolare segue

$$\text{differenziabilità} \Rightarrow \text{derivabilità}$$

Si dimostra come nel caso di \mathbb{R} che la

$$\text{differenziabilità} \Rightarrow \text{continuità}$$

Quindi derivabilità e continuità sono condizioni necessarie ma non sufficienti per la differenziabilità (si veda l'osservazione sulla pagina 124)

- Ricordando la definizione di $o(\cdot)$ la condizione $f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$ per $x \rightarrow x_0$ si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0))}{\|x - x_0\|} = 0 \quad (\text{limite in } \mathbb{R}!).$$

- Il termine lineare nella definizione di differenziabilità fornisce l'equazione

$$z = p(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0)$$

del *piano tangente* p al grafico di f nel punto x_0 , cioè il piano (o più propriamente l'iperpiano) che localmente ha un unico punto di intersezione con il grafico di f , cfr. Figura 77. Si osserva che per $N = 2$ l'equazione del piano tangente è data da

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \end{aligned}$$

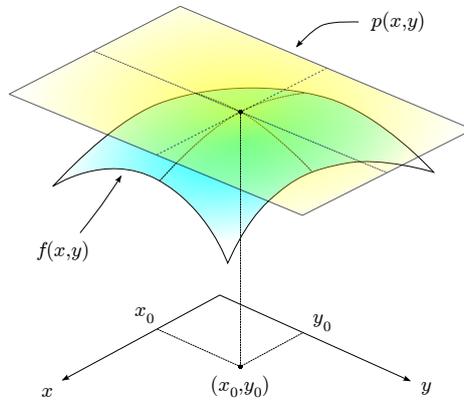
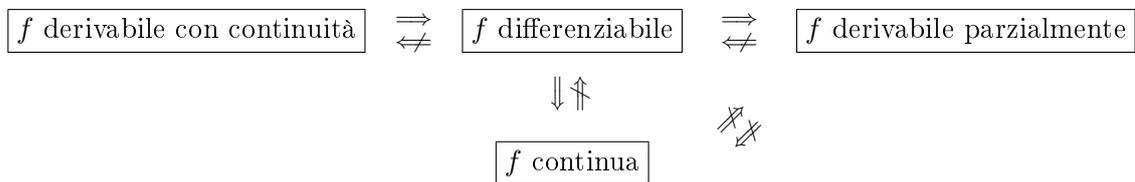


FIGURA 77. Piano tangente.

La seguente proposizione fornisce una condizione sufficiente per la differenziabilità che a volte risulta più semplice da verificare.

PROPOSIZIONE 8.5. *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ un punto interno di X . Se esiste $r > 0$ tale che f è derivabile con continuità in $B_r(x_0)$ (cioè le derivate parziali esistono e sono continue in $B_r(x_0)$) allora f è differenziabile in x_0 .*

Riassumendo abbiamo (per $N > 1$)



Derivate Direzionali. Concludiamo le varie definizioni di derivabilità con quella di derivata direzionale.

DEFINIZIONE 8.6. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto interno di X e $v \in \mathbb{R}^N$ un versore, cioè $\|v\| = 1$. Se esiste

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile rispetto la direzione v* in x_0 con *derivata direzionale* $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$. Altre notazioni: $f_v(x_0) = D_v f(x_0)$.

OSSERVAZIONE. La derivata direzionale rispetto x corrisponde a fare la derivata ordinaria (cioè rispetto una variabile) della funzione $F(t) = f(x_0 + tv)$, $t \in \mathbb{R}$, che è la restrizione della f alla retta $y = x_0 + tv$. Quindi essa fornisce informazioni sul comportamento (crescenza/decrecenza) della funzione f lungo tale retta nell'intorno del punto x_0 .

Se v coincide con i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^N , cioè $v = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i\text{-esimo}}, 0, \dots, 0)$ allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ coincide con la i -esima derivate parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, cfr. Figura 78.

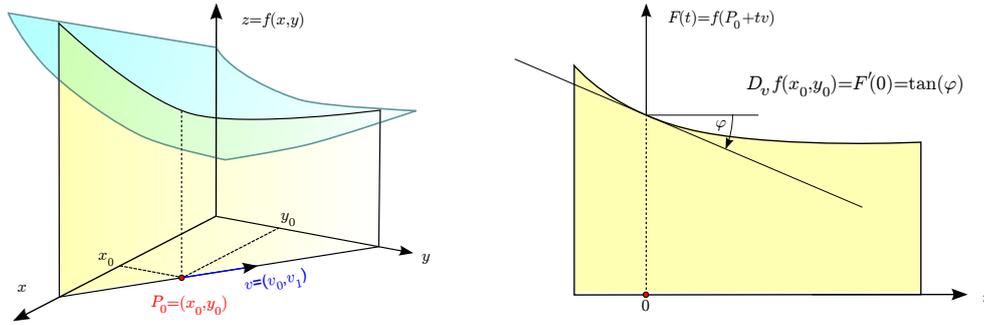


FIGURA 78. Derivata direzionale.

Si ha il seguente importante teorema che lega gradiente e derivate direzionali. Oltre a fornire una semplice regola per il calcolo delle derivate direzionale, esso ha applicazioni in fisica.

TEOREMA 8.7 (Teorema del gradiente). Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ interno a X e $v \in \mathbb{R}^N$ un versore. Se f è differenziabile in x_0 allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Df(x_0) \cdot v$$

OSSERVAZIONE. Dal teorema precedente segue che se f è differenziabile in x_0 , allora in x_0 esistono le derivate direzionali secondo ogni direzione v .

ESEMPIO. Sia $f(x, y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $(x, y) = (1, 1)$. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = Df(1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (9, 3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

OSSERVAZIONE. Diamo ora due significative proprietà geometriche del gradiente.

1) Dal teorema del gradiente si ha che

$$\max_{v: \|v\|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \max_{v: \|v\|=1} Df(x_0) \cdot v = Df(x_0) \cdot \frac{Df(x_0)}{\|Df(x_0)\|}$$

visto che il prodotto scalare tra due vettori è massimo se i due vettori sono paralleli e concordi. Quindi la derivata direzionale è massima nella direzione del gradiente. Ricordando l'interpretazione della derivata direzionale come misura del tasso di crescita di f in una data direzione, possiamo concludere che *il gradiente Df punta nella direzione di massima crescita di f . Inoltre, $-Df$ punta nella direzione di massima decrescita di f .*

2) Consideriamo ora la curva di livello di f per il punto x_0 , cioè

$$\Gamma_{f(x_0)} = \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}.$$

Supponendo che $\Gamma_{f(x_0)}$ sia una curva regolare (potrebbe non essere vero), sia τ il versore tangente a $\Gamma_{f(x_0)}$ in x_0 . Poiché f è costante su $\Gamma_{f(x_0)}$ e muoversi lungo la direzione τ corrisponde, a meno di termini di ordine superiore, a muoversi lungo la curva $\Gamma_{f(x_0)}$, si ha euristicamente

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0) = 0.$$

Quindi dal Teorema del Gradiente segue

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0) = Df(x_0) \cdot \tau = 0$$

Ricordando che il prodotto scalare tra due vettori è nullo solo se i due vettori sono perpendicolari, concludiamo che $Df(x_0)$ è ortogonale alla curva di livello di f per x_0 , cfr. Figura 79.

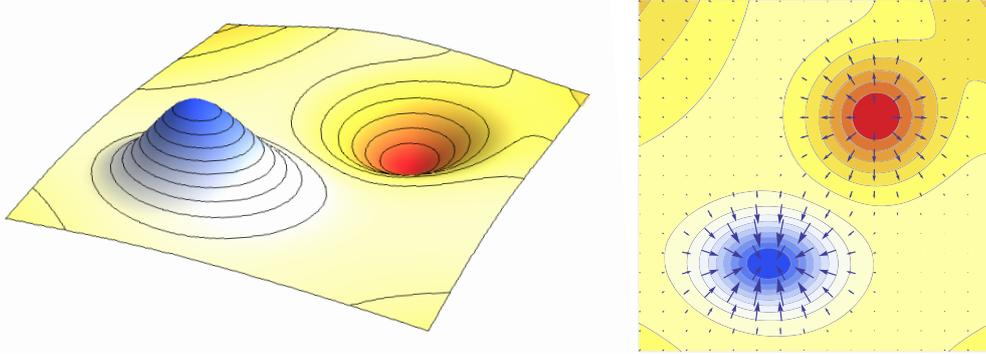


FIGURA 79. Grafico e linee di livello con gradiente.

Derivate di Ordine Superiore

DEFINIZIONE 8.8. Se f è derivabile parzialmente rispetto x_i ed è tale che $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è nuovamente derivabile parzialmente rispetto la variabile x_j , allora possiamo definire

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \text{derivata seconda di } f \text{ rispetto } x_i \text{ e } x_j =: D_{x_i, x_j}^2 f =: f_{x_i, x_j}$$

e si può continuare in questa maniera considerando derivate parziali di ordine superiore.

ESEMPIO. Sia $f(x, y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, allora $f_{xx}(x, y) = 12xy$, $f_{yy}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6x^2 + 3$.

Osserviamo che le derivate parziali f_{xy} e f_{yx} coincidono nell'esempio precedente. È naturale chiedersi se conta l'ordine rispetto cui deriviamo, cioè se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Il seguente teorema garantisce che sotto opportune condizioni l'ordine non è importante.

TEOREMA 8.9 (Teorema di Schwarz). Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, interno. Se in x_0 esistono e sono continue entrambe le derivate parziali $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, allora esse coincidono, cioè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Supponiamo che la funzione f ammetta in x_0 tutte le derivate seconde e consideriamo la matrice $N \times N$ definita nel seguente modo

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$$

Quindi nell' i -esima riga abbiamo le derivate seconde fatte prima rispetto alla variabile x_i e poi rispetto alle altre variabili (in ordine crescente). La matrice $Hf(x_0)$ è detta matrice di Hesse (oppure semplicemente Hessiana) di f in x_0 .

Dal teorema di Schwarz segue che la matrice Hessiana è *simmetrica*. Si vedrà nel in seguito questo fatto ha importanti conseguenze nella ricerca degli estremi locali di funzioni di più variabili.

ESEMPIO. Sia $f(x, y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, allora

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12xy & 6x^2 + 3 \\ 6x^2 + 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Estremi in \mathbb{R}^N

In questa sezione studieremo condizioni necessarie e condizioni sufficienti per caratterizzare i punti di massimo e minimo locale per una funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Iniziamo con il dare la definizione di punti di estremo locale. Si ricordi che $B_r(x_0)$ denota l'intorno circolare di raggio r di un punto $x_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$, i.e.

$$B_r(x_0) = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < r\}.$$

DEFINIZIONE 8.10. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di più variabili reali, allora

- $x_0 \in X$ si dice *punto di minimo locale*, se esiste $r > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in X \cap B_r(x_0)$; se x_0 è un punto di minimo locale, $f(x_0)$ si dice *minimo locale*;
- $x_0 \in X$ si dice *punto di massimo locale*, se esiste $r > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in X \cap B_r(x_0)$; se x_0 è un punto di massimo locale, $f(x_0)$ si dice *massimo locale*;
- se x_0 è un punto di minimo o di massimo locale, allora x_0 si dice *punto di estremo locale* mentre $f(x_0)$ si dice *estremo locale*.

Condizioni necessarie per gli estremi locali. Nel caso unidimensionale la condizione necessaria per i punti di estremo locale é data dal Teorema di Fermat. Andiamo a vedere come questa condizione si generalizza al caso N -dimensionale (si ricordi che, dato un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^N$, un punto x_0 si dice *interno* a X se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset X$).

TEOREMA 8.11 (Teorema di Fermat). Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ un punto di estremo locale per f in X . Se f é differenziabile in x_0 e x_0 é interno a X , allora $Df(x_0) = 0$, cioè

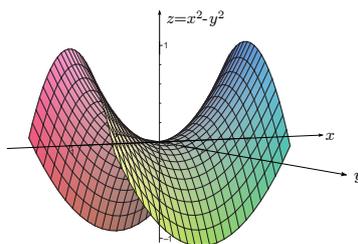
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) = 0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONI. Valgono riguardo al Teorema di Fermat alcune osservazioni simili al caso unidimensionale

- Il Teorema di Fermat vale solo nei punti interni ad X . Cioè se $x_0 \in X$ è un punto di estremo locale di f , ma x_0 non é interno ad X , allora non é necessariamente vero che $Df(x_0) = 0$.
- Se $Df(x_0) = 0$ allora x_0 si dice *punto critico* oppure *punto stazionario* di f .
- Il Teorema di Fermat fornisce soltanto una condizione necessaria ma *non* sufficiente per estremi locali, cioè *non* ogni punto critico è un punto di estremo locale. Basta considerare $f(x, y) = x^2 - y^2$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora $Df(x, y) = (2x, -2y)$ e quindi $(x_0, y_0) = (0, 0)$ è un punto critico per f ma non è un punto di estremo locale. Infatti $f(x, 0)$ ha un punto di minimo locale per $x_0 = 0$, mentre $f(0, y)$ ha un punto di massimo locale per $y_0 = 0$ (vedi figura 80).

PROBLEMA. Come si può stabilire se un punto critico di una funzione di più variabili é un punto di estremo locale?

Nel caso unidimensionale si utilizzano due metodi:

FIGURA 80. Grafico di $f(x, y) = x^2 - y^2$.

- Lo studio del segno della derivata prima nell'intorno del punto critico
 - Il segno della derivata seconda (o della prima derivata non nulla) nel punto critico
- Andiamo a vedere come il secondo metodo può essere esteso al caso N -dimensionale.

Condizioni sufficienti per gli estremi locali. Introduciamo alcune definizioni preliminari. Nel seguito indicheremo con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

un vettore colonna e con x^T il suo trasposto (vettore riga).

DEFINIZIONE 8.12. Una matrice simmetrica A si dice

- *definita positiva (negativa)* se $x^T Ax > 0$ (< 0) per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$;
- *semi-definita positiva (negativa)* se $x^T Ax \geq 0$ (≤ 0) per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$;
- *indefinita* se esistono x_1, x_2 tali che $x_1^T Ax_1 > 0$ e $x_2^T Ax_2 < 0$

ESEMPIO.

(1) La matrice identità

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

è definita positiva. Infatti per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$

$$x^T Ax = x_1^2 + \dots + x_N^2 > 0.$$

Analogamente la matrice $A = -I$ è definita negativa.

(2) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è indefinita. Infatti

$$(10)A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

$$(01)A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

(3) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è semi-definita positiva poiché $x^T Ax = x_1^2 \geq 0$ per ogni vettore $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. D'altra parte $x^T Ax = 0$ per ogni vettore del tipo $x = (0, x_2)$.

TEOREMA 8.13 (Condizioni sufficienti per gli estremi locali). Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(X)$ e $x_0 \in X$ un punto critico per f interno a X e sia $Hf(x_0)$ la matrice Hessiana di f in x_0 . Allora

- (1) se $Hf(x_0)$ é definita positiva, x_0 é un punto di minimo locale;
- (2) se $Hf(x_0)$ é definita negativa, x_0 é un punto di massimo locale;
- (3) se $Hf(x_0)$ é indefinita, x_0 non é un punto di estremo locale e si dice punto di sella.

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in C^2(X)$ e x_0 é interno a X , si ha dalla Formula di Taylor del 2° ordine con il resto di Peano centrata in x_0

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T Hf(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

for $x \rightarrow x_0$. Poiché per ipotesi $Df(x_0) = 0$, allora

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T Hf(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

Per x vicino a x_0 il resto $o(\|x - x_0\|^2)$ é trascurabile rispetto al termine del 2° ordine e quindi il segno di $f(x) - f(x_0)$ é dato dal segno di $(x - x_0)^T Hf(x_0)(x - x_0)$. Quindi

1) se $Hf(x_0)$ é definita positiva, allora $f(x) - f(x_0) \geq 0$ e quindi $f(x) \geq f(x_0)$ per x vicino a x_0 . Ne segue che x_0 é un punto di minimo locale;

2) se $Hf(x_0)$ é definita negativa, allora $f(x) - f(x_0) \leq 0$ e quindi $f(x) \leq f(x_0)$ per x vicino a x_0 . Ne segue che x_0 é un punto di massimo locale;

3) se $Hf(x_0)$ é indefinita esistono punti comunque vicini a x_0 tali che $f(x) - f(x_0)$ cambia segno. Ne segue che x_0 non é un estremo locale. \square

OSSERVAZIONI.

- Si osservi che nel caso in cui $Hf(x_0)$ é solo semi-definita (positiva o negativa) nulla si può concludere sulla natura del punto critico, come si vede dagli esempi $f_1(x, y) = x^4 + y^4$ e $f_2(x, y) = -x^4 - y^4$. Entrambe queste funzioni hanno un punto critico in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e la corrispondente matrice Hessiana, essendo identicamente nulla, é semidefinita in $(0, 0)$. Tuttavia la funzione f_1 ha un punto di minimo assoluto (e quindi locale) in $(0, 0)$, mentre la funzione f_2 ha un punto di massimo assoluto (e quindi locale) in $(0, 0)$.

- Si osservi che nel caso $N = 1$ il teorema precedente contiene un risultato già visto in precedenza. Infatti per una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la matrice Hessiana é una matrice 1×1 data dalla derivata seconda ($f''(x)$). Quindi $Hf(x_0) = (f''(x_0))$ é definita positiva (negativa) se $f''(x_0) > 0 (< 0)$. In tal caso il punto critico é rispettivamente un punto di minimo locale (massimo locale). La matrice é semidefinita se $f''(x_0) = 0$ e in questo caso occorre studiare il segno delle derivate di ordine superiore per stabilire la natura del punto critico. Ovviamente una matrice 1×1 non può essere indefinita.

A questo punto risulta importante trovare delle condizioni per controllare in maniera semplice se una matrice simmetrica sia definita positiva o negativa poiché le condizioni date nella Definizione 8.12 non sono di immediata verifica; si tratta infatti di risolvere la disequazione in N variabili $x^T A x \leq 0$.

La prima condizione che andiamo ad enunciare é basata sullo studio degli autovalori della matrice.

OSSERVAZIONE. Si ricordi che $\lambda \in \mathbb{C}$ é detto *autovalore* di una matrice quadrata $N \times N$ A se $\det(A - \lambda I) = 0$. Poiché $\det(A - \lambda I) = 0$ é una equazione algebrica di ordine N nell'incognita λ , essa ammette sempre N soluzioni contate con la loro molteplicità. Quindi la matrice A ammette sempre N autovalori $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, N$.

Un risultato importante nella teoria delle matrici afferma che una *matrice simmetrica* A ammette sempre **autovalori reali**. Il teorema seguente fornisce delle condizioni per stabilire se una matrice simmetrica é definita o indefinita in base al segno degli autovalori.

TEOREMA 8.14. Sia A una matrice simmetrica $N \times N$ e $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ i suoi autovalori. Allora

- A é definita positiva se e solo se $\lambda_k > 0$ per ogni $k = 1, \dots, N$.
- A é definita negativa se e solo se $\lambda_k < 0$ per ogni $k = 1, \dots, N$.
- A é indefinita se e solo se esistono un autovalore λ_n positivo e un autovalore λ_m negativo.

Quindi, se siamo in grado di calcolare gli autovalori della matrice Hessiana $Hf(x_0)$ possiamo stabilire la natura del punto critico x_0 . Tuttavia il calcolo degli autovalori di una matrice A richiede il calcolo delle radici dell'equazione algebrica di ordine N

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Per valori di $N \geq 3$ non sempre é semplice risolvere l'equazione precedente. Vediamo ora una condizione che richiede solo il calcolo del determinante di N sotto-matrici di $Hf(x_0)$.

DEFINIZIONE 8.15. Data una matrice $N \times N$ A si definiscono *minori principali* di A le N sotto-matrici A_k , $k = 1, \dots, N$, ottenute prendendo gli elementi appartenenti alle prime k righe ed alle prime k colonne di A

$$A_1 = (a_{11}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_N = A.$$

Si ha il seguente criterio per stabilire se una matrice simmetrica risulta definita positiva o negativa. Tale criterio ovviamente andrà applicato alla matrice Hessiana di f ne punto critico x_0 .

PROPOSIZIONE 8.16 (*Criterio di Hurwitz*). Sia A una matrice simmetrica e siano A_k , $k = 1, \dots, N$, i suoi minori principali. Allora

- A é definita positiva se e solo se $\det(A_k) > 0$ per ogni $k = 1, \dots, N$;
- A é definita negativa se e solo se $(-1)^k \det(A_k) > 0$ per ogni $k = 1, \dots, N$.

Nel caso di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, il criterio di Hurwitz fornisce il seguente semplice metodo per verificare la natura del punto critico.

PROPOSIZIONE 8.17 (*Condizioni sufficienti per gli estremi locali di funzioni di 2 variabili*). Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(X)$, $(x_0, y_0) \in X$ un punto critico per f interno a X e sia $Hf(x_0, y_0)$ la matrice Hessiana di f in (x_0, y_0) . Allora

- (1) se $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) é un punto di minimo locale;
- (2) se $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) é un punto di massimo locale;
- (3) se $\det(Hf(x_0, y_0)) < 0$, (x_0, y_0) é un punto di sella.

OSSERVAZIONE. Se $\det(Hf((x_0, y_0))) = 0$, la matrice Hessiana é indefinita e nulla si può concludere sulla natura del punto critico. In questo caso bisogna ricorrere ad altre tecniche per determinare la natura del punto critico.

ESEMPLI.

• Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. Allora $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $Df(x, y) = (2x, 2y)$. L'unico punto critico di f é il punto $(0, 0)$. Si ha

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(Hf(0, 0)) = 4 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$, si ha che $(0, 0)$ é un punto di minimo locale (in realtà anche assoluto poiché $f(0, 0) = 0 \leq f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

• Sia $f(x, y) = x^2 - y^2$. Allora $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $Df(x, y) = (2x, -2y)$. L'unico punto critico di f è il punto $(0, 0)$. Si ha

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(Hf(0, 0)) = -4 < 0$, $(0, 0)$ è un punto di sella.

• Sia $f(x, y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$. Allora $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $Df(x, y) = (6xy - 6x, 3x^2 + 12y^2 - 24y)$. I punti critici di f sono $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$. Si ha

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6(y-1) & 6x \\ 6x & 24(y-1) \end{pmatrix}$$

(1) Poiché

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$$

si ha $\det(Hf(0, 0)) = 144 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -6 < 0$, allora $(0, 0)$ è un punto di massimo locale.

(2) Poiché

$$Hf(0, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

si ha $\det(Hf(0, 2)) = 144 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 2) = 6 > 0$, allora $(0, 2)$ è un punto di minimo locale.

(3) Poiché

$$Hf(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha $\det(Hf(2, 1)) < 0$, allora $(2, 1)$ è un punto di sella.

(4) Poiché

$$Hf(-2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha $\det(Hf(-2, 1)) < 0$, allora $(-2, 1)$ è un punto di sella.

Funzioni a Valori Vettoriali

Fin qui abbiamo considerato il caso di funzioni il cui codominio fosse \mathbb{R} . In questo capitolo consideriamo il caso di funzioni il cui codominio è uno spazio euclideo \mathbb{R}^M con $M \geq 1$.

ESEMPIO. Consideriamo un punto materiale che si muove nello spazio in un intervallo di tempo $[0, T]$. Siano $(x(t), y(t), z(t))$ le sue coordinate al tempo $t \in [0, T]$. Risulta così definita una funzione a valori vettoriali $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

DEFINIZIONE 9.1. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^M$ si dice *funzione a valori vettoriali*.

Si osservi che definire una funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ equivale a dare M funzioni reali $f_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, M$. Infatti ad ogni $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ associamo il vettore¹

$$(y_1, \dots, y_M)^T = f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_M(x_1, \dots, x_N))^T \in \mathbb{R}^M.$$

Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale $f(x, y) = (xy, e^{xy}, x^2)$ è definita dalle tre funzioni $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, date dalle sue componenti, cioè $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = e^{xy}$, $f_3(x, y) = x^2$. Si osservi che da questa identificazione segue che il dominio della funzione a valori vettoriali è dato dall'intersezione dei domini delle sue componenti.

Utilizzando l'identificazione tra funzione a valori vettoriali e le sue componenti possiamo facilmente estendere alcune definizioni date nel caso di funzioni reali di più variabili reali.

DEFINIZIONE 9.2. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $l = (l_1, \dots, l_M) \in \mathbb{R}^M$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i$, $i = 1, \dots, M$ (cioè se la convergenza si ha componente per componente).

OSSERVAZIONE. Dalle corrispondenti proprietà dei limiti di funzioni di più variabili segue

- unicità del limite;
- regole per il calcolo dei limiti (in questo caso, poiché il codominio è uno spazio vettoriale avremo somma e moltiplicazione per uno scalare componente per componente);
- limite della funzione composta.

Dalla definizione di limite deduciamo immediatamente la definizione di continuità

DEFINIZIONE 9.3. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ e $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di X . Allora f si dice *continua* in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ o, equivalentemente, $\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = f_i(x_0)$, $i = 1, \dots, M$ (cioè tutte le componenti f_i di f sono continue in x_0).

DEFINIZIONE 9.4. $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, $x_0 \in X$, allora f si dice *derivabile* in $x_0 \iff f_i(x)$ è derivabile in x_0 , $i = 1, \dots, M$ (cioè tutte le componenti sono derivabili in x_0).

DEFINIZIONE 9.5. $f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, $x_0 \in X$, allora f si dice *differenziabile* in $x_0 \iff f_i(x)$ è differenziabile in x_0 , $i = 1, \dots, M$ (cioè tutte le componenti sono differenziabili in x_0), cioè se

$$f_i(x) = f_i(x_0) + Df_i(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad \forall i = 1, \dots, M.$$

¹Nel seguito $(\dots)^T = (:)^T$ indica il vettore trasposto.

OSSERVAZIONE. Introduciamo una notazione matriciale, che risulterà utile anche in seguito, per riscrivere la precedente definizione di differenziabilità. Consideriamo f come vettore colonna

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_M(x) \end{pmatrix},$$

allora la matrice $M \times N$, detta matrice di **Jacobi** (o *Jacobiana*) di f in x_0 è data da

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} Df_1(x_0) \\ \vdots \\ Df_M(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}_{M \times N}.$$

Allora la condizione di differenziabilità si può riscrivere in notazione matriciale come

$$f(x) = f(x_0) + J_f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Derivata della Funzione Composta. Adesso diamo una regola per la Jacobiana della funzione composta, che generalizza al caso delle funzioni a valori vettoriali la regola della catena (cfr. pagina 51) per la derivata della funzione composta.

TEOREMA 9.6. *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^M$ differenziabile nel punto $x_0 \in X$ e sia $g : Y \subseteq \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^K$ differenziabile in $y_0 := f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$ è differenziabile in x_0 con*

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$

Questa formula si chiama Regola della Catena.

OSSERVAZIONE. Ovviamente per $N = M = K = 1$ ritroviamo la regola della catena per le funzioni reali di una variabile.

ESEMPIO. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, allora $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \circ f(s) = g(f_1(s), f_2(s))$ e

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(s) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(f_1(s), f_2(s)), \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(s), f_2(s)) \right) \cdot \begin{pmatrix} f_1'(s) \\ f_2'(s) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(s), f_2(s)) \cdot f_1'(s) + \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(s), f_2(s)) \cdot f_2'(s) \end{aligned}$$

Trasformazioni Regolari di Coordinate

Un caso particolarmente importante delle funzioni a valori vettoriali è quello in cui spazio di partenza ed arrivo coincidono, cioè $M = N$.

DEFINIZIONE 9.7. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice una *trasformazione di coordinate*.

Un esempio di trasformazione di coordinate è l'applicazione lineare (cfr. Corso di Geometria) $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $f(x) = A \cdot x$, ove A è una matrice $N \times N$ (vedremo più avanti altri esempi significativi). Sappiamo che se $\det(A) \neq 0$, la trasformazione f si può invertire, cioè si può definire una trasformazione $f^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ (nel caso in questione $f^{-1}(y) = A^{-1} \cdot y$) tale che $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$.

PROBLEMA. Data una trasformazione di coordinate $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^N$, sotto quali condizioni su f essa si può invertire? Cioè sotto quali condizioni esiste la funzione inversa $f^{-1} : Y \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^N$?

DEFINIZIONE 9.8. Una trasformazione di coordinate $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice *regolare* se $f \in C^1(X)$ (cioè le derivate parziali di f esistono e sono continue in X) e $\det(J_f(x)) \neq 0$ eccetto al più “alcuni punti”² (detti *punti singolari* della trasformazione).

Si osservi che se $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ allora $J_f(x_0)$ è una matrice invertibile. Si ha il seguente teorema di invertibilità locale.

TEOREMA 9.9. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una trasformazione regolare di coordinate e sia $x_0 \in X$ tale che $\det(J_f(x_0)) \neq 0$. Allora esiste un intorno $U(x_0)$ di x_0 e un intorno $V(y_0)$ di $y_0 = f(x_0)$ tale che $f : U(x_0) \rightarrow V(y_0)$ è invertibile. Inoltre l'inversa $f^{-1} : V(y_0) \rightarrow U(x_0)$ è una trasformazione regolare di coordinate e

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f^{-1}(x) \quad \forall y \in V(y_0)$$

ove J_f^{-1} è l'inversa della matrice Jacobiana di f e $f(x) = y$.

La formula precedente generalizza la formula di derivazione della funzione inversa $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ a cui si riduce per $N = 1$, cfr. pagina 52. La condizione $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ equivale alla condizione $f'(x_0) \neq 0$. Vediamo ora alcuni esempi di trasformazioni regolari di coordinate.

ESEMPIO. Consideriamo la trasformazione lineare associata alla matrice $A = (a_{ij})_{N \times N}$ cioè

$$f(x) = A \cdot x = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N, \dots, a_{N1}x_1 + \dots + a_{NN}x_N)^T, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Allora $J_f(x) = A$ per ogni x e $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ equivale a $\det(A) \neq 0$. Ritroviamo in questo caso il ben noto risultato: la trasformazione è invertibile se e solo se A è non degenere, inoltre l'inversa non è solo locale ma definita globalmente su \mathbb{R}^N .

ESEMPIO (Coordinate Polari). Vediamo ora le coordinate polari che abbiamo già richiamato a pagina 120 come una trasformazione di coordinate.

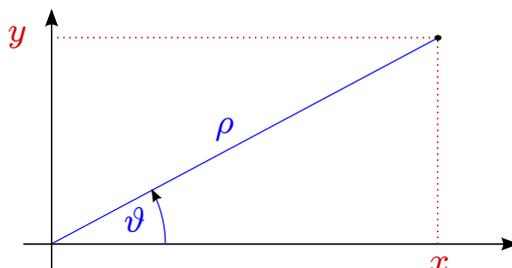


FIGURA 81. Coordinate polari.

Sia

$$f : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\rho, \vartheta) \mapsto (\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta))^T$$

cioè essa fa corrispondere alla coppia (ρ, ϑ) il punto del piano di coordinate cartesiane $(x, y) = (\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta))$. Per questa trasformazione si ha

$$J_f(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\rho \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \rho \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

quindi $\det J_f(\rho, \vartheta) = \rho \cos^2(\vartheta) + \rho \sin^2(\vartheta) = \rho$. Quindi l'origine, che corrisponde a $\rho = 0$ è l'unico punto singolare della trasformazione e di conseguenza le coordinate polari sono una trasformazione regolare di coordinate.

²Per chiarire il significato di “alcuni punti” andrebbe introdotta una misura su \mathbb{R}^N . Basti sapere che la condizione è verificata se tali punti sono un insieme di dimensione $N - 1$.

ESEMPIO (*Coordinate Cilindriche*). Vediamo ora le coordinate cilindriche in \mathbb{R}^3 . Esse sono data dalla terna $(\rho, \vartheta, t) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, cfr. Figura 82.

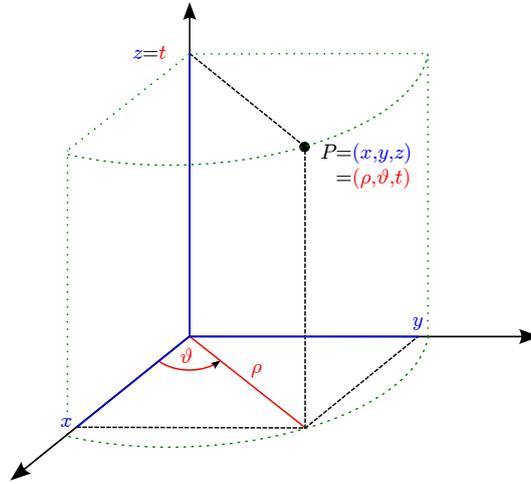


FIGURA 82. Coordinate Cilindriche.

Il legame tra coordinate cilindriche e coordinate cartesiane è dato dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta), \\ y = \rho \sin(\vartheta), \\ z = t. \end{cases}$$

Come nel caso delle coordinate polari, possiamo vedere le coordinate cilindriche come una trasformazione di coordinate in \mathbb{R}^3 definita nel seguente modo

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \vartheta, t) &\mapsto (\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta), t)^T \end{aligned}$$

Per questa trasformazione si ha

$$J_f(\rho, \vartheta, t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\rho \sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \rho \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\det J_f(\rho, \vartheta, t) = \rho$ e in questo caso l'insieme dei punti singolari, che corrisponde a $\rho = 0$, è l'asse z . Di conseguenza le coordinate cilindriche sono una trasformazione regolare di coordinate.

ESEMPIO (*Coordinate sferiche*). Concludiamo infine con le coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 . Esse sono date dalla terna $(\rho, \vartheta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, cfr. Figura 83. Il passaggio da coordinate sferiche e coordinate cartesiane è dato dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \\ z = \rho \cos(\varphi). \end{cases}$$

Le coordinate sferiche inducono la trasformazione di coordinate in \mathbb{R}^3 definita nel seguente modo

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \varphi, \vartheta) &\mapsto (\rho \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \rho \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \rho \cos(\varphi))^T \end{aligned}$$

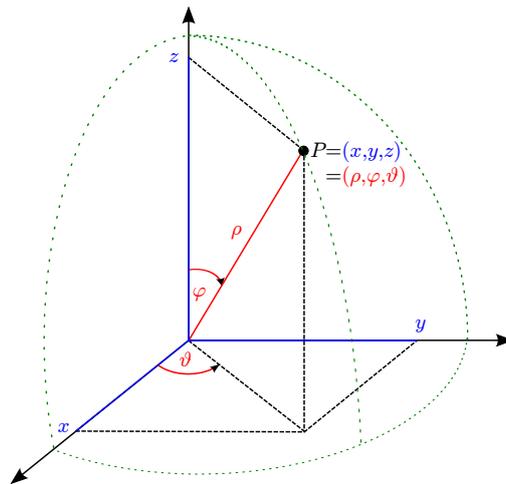


FIGURA 83. Coordinate sferiche.

Per questa trasformazione si ottiene

$$J_f(\rho, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & \rho \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & -\rho \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & \rho \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & \rho \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\det J_f(\rho, \varphi, \vartheta) = \rho^2 \sin(\varphi)$ ed anche in questo caso l'insieme dei punti singolari, che corrisponde a $\rho = 0$ o $\sin(\varphi) = 0$, è l'asse z . Di conseguenza le coordinate sferiche sono una trasformazione regolare di coordinate.

Calcolo Integrale per Funzioni di più Variabili

Integrali Doppi: Definizione e prime Proprietà

Per semplicità considereremo solo il caso in cui la funzione da integrare è definita da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} . Tuttavia la costruzione dell'integrale di Riemann che andiamo a descrivere potrebbe essere ripetuta (con opportune notazioni) in \mathbb{R}^N . In questo caso il problema geometrico è il seguente

PROBLEMA. Data una funzione $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, calcolare il volume V compreso tra il grafico di f e ed il piano xy .

Come nel caso degli integrali in una variabile, l'idea è di approssimare il volume V da sotto e da sopra, cioè per eccesso e per difetto. Si tenga conto però che in questo caso la geometria del dominio X può essere complicata e quindi difficile da scomporre in sottodomini. Pertanto considereremo dapprima il caso in cui il dominio è un rettangolo.

Domini Rettangolari. Consideriamo il caso in cui $X = [a, b] \times [c, d]$. Creiamo una partizione di X in rettangoli a partire da partizioni di $[a, b]$ e $[c, d]$.

- Data una partizione $P_x = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$ e una partizione $P_y = \{c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d\}$ di $[c, d]$, consideriamo una partizione $P_{xy} = P_x \times P_y$ di $[a, b] \times [c, d]$ nei rettangoli

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

- Se P_{xy} è una partizione di $[a, b] \times [c, d]$, allora definiamo per $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

$$m_{ij} := \inf\{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\},$$

$$M_{ij} := \sup\{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\},$$

$$|R_{ij}| := (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \text{area del rettangolo } R_{ij},$$

$$s(f, P_{xy}) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \cdot |R_{ij}| =: \text{somma inferiore},$$

$$S(f, P_{xy}) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \cdot |R_{ij}| =: \text{somma superiore}.$$

Quindi per ogni partizione P_{xy} di X vale

$$s(f, P_{xy}) \leq V \leq S(f, P_{xy}),$$

cioè le somme inferiori sono sempre approssimazioni di V per difetto mentre le somme superiori danno sempre approssimazioni per eccesso. Perciò

- più *grande* è $s(f, P_{xy})$ migliore è l'approssimazione,
- più *piccolo* è $S(f, P_{xy})$ migliore è l'approssimazione.

Se non c'è differenza tra la migliore approssimazione da sotto (cioè quella più grande) e quella migliore da sopra (cioè quella più piccola), allora il problema è (teoricamente) risolto e f si dice *integrabile*.

DEFINIZIONE 10.1. Sia $f : X := [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Se

$$\sup\{s(f, P_{xy}) : P_{xy} \text{ partizione di } X\} = \inf\{S(f, P_{xy}) : P_{xy} \text{ partizione di } X\} =: I,$$

allora f si dice *integrabile* (secondo Riemann). In questo caso si pone $V = I$ e

$$I =: \iint_X f(x, y) \, dx \, dy$$

si dice *integrale doppio* di f (= funzione integranda) in X (= dominio dell'integrazione).

ESEMPLI. • Se f è costante, cioè $f(x, y) = c$ per ogni $(x, y) \in X := [a, b] \times [c, d]$ è facile verificare dalla definizione che f è integrabile con $\iint_X f(x, y) \, dx \, dy = c \cdot (b-a) \cdot (d-c)$.
 • Per costruire un esempio di funzione non integrabile, si può estendere la funzione di Dirichlet (cfr. pagina 41) in \mathbb{R}^2 . La funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in ([a, b] \setminus \mathbb{Q}) \times [c, d] \\ 0 & \text{se } (x, y) \in ([a, b] \cap \mathbb{Q}) \times [c, d] \end{cases}$$

non è integrabile. Infatti, come nel caso dell'esempio unidimensionale, per ogni partizione P_x di $[a, b]$ si ha che ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene sia punti razionali (in cui f ammette il valore 0) sia punti irrazionali (in cui f ammette il valore 1). Quindi segue $m_{ij} = 0$ e $M_{ij} = 1$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$. Così risulta per ogni partizione P_{xy}

$$s(f, P_{xy}) = 0 \neq (b-a) \cdot (d-c) = S(f, P_{xy})$$

per cui f non è integrabile.

Domini Generali. Ora estendiamo la precedente costruzione al caso di un generico sottoinsieme *limitato* di \mathbb{R}^2 e $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dato \mathcal{R} un rettangolo contenente X , definiamo

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in X; \\ 0, & \text{se } (x, y) \in \mathcal{R} \setminus X. \end{cases}$$

cioè estendiamo f ponendola 0 fuori da X . Si osservi che \bar{f} è definita in un rettangolo e quindi per essa si può definire l'integrale come visto in precedenza.

DEFINIZIONE 10.2. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e $X \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Se dato \mathcal{R} contenente X , la funzione \bar{f} definita come sopra risulta integrabile in \mathcal{R} , allora f si dice *integrabile* (secondo Riemann) in X . In questo caso si pone

$$\iint_X f(x, y) \, dx \, dy := \iint_{\mathcal{R}} \bar{f}(x, y) \, dx \, dy$$

OSSERVAZIONE. Si può dimostrare che la definizione precedente è indipendente dalla scelta del rettangolo \mathcal{R} . D'altra parte si osservi che il contributo all'integrale di $\iint_{\mathcal{R}} \bar{f}(x, y) \, dx \, dy$ dei rettangoli contenuti in $\mathcal{R} \setminus X$ è nullo.

A partire dalla definizione precedente si può dare una definizione di misura (area) di un insieme di \mathbb{R}^2 , tenendo conto che integrando la funzione identicamente 1 sul dominio X si trova che il volume V del cilindro è dato da $V = 1 \cdot \text{area}(X)$, cfr. Figura 84.

Ciò giustifica la seguente

DEFINIZIONE 10.3. Se X è un insieme limitato tale che la sua funzione caratteristica $\mathbb{1}_X$ è integrabile, allora si dice che X è *misurabile* e si pone

$$|X| := \iint_X 1 \, dx \, dy = \text{misura} (= \text{area}) \text{ di } X$$

Diamo ora alcune proprietà degli integrali doppi.

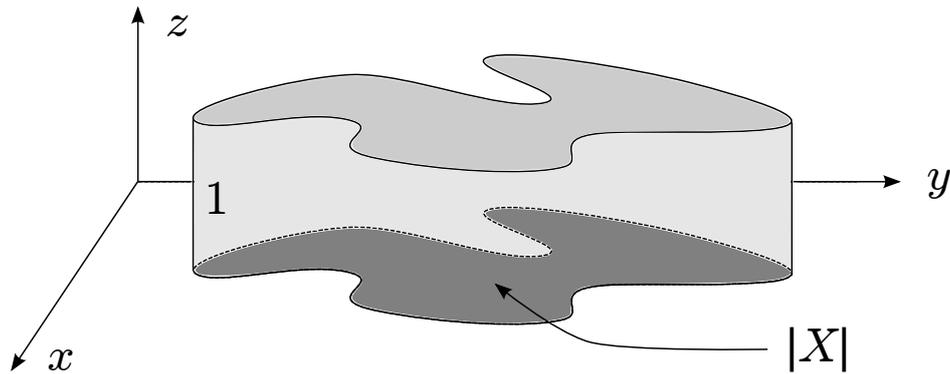


FIGURA 84. La misura di un'insieme.

Proprietà dell'Integrale. Siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili. Allora

- $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è integrabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni integrabili con dominio X è uno spazio vettoriale) e

$$\iint_X (\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)) \, dx \, dy = \alpha \cdot \iint_X f(x, y) \, dx \, dy + \beta \cdot \iint_X g(x, y) \, dx \, dy$$

(cioè l'integrale è un'operazione *lineare*);

- Se $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in X$ allora

$$\iint_X f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_X g(x, y) \, dx \, dy$$

(cioè l'integrale è *monotono*);

- anche $|f|$ è integrabile e

$$\left| \iint_X f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_X |f(x, y)| \, dx \, dy$$

(*disuguaglianza triangolare*).

- Se $|X| = 0$, allora

$$\iint_X f(x, y) \, dx \, dy = 0$$

- Se $X = X_1 \cup X_2$ e $|X_1 \cap X_2| = 0$, allora

$$\iint_X f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{X_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{X_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

(*additività* dell'integrale rispetto alla misura di insiemi)

A questo punto, come nel caso di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di una variabile, si pongono due

PROBLEMI. (i) Quali funzioni $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili?

(ii) Se f è integrabile, come si può calcolare $\iint_X f(x, y) \, dx \, dy$?

Si tenga conto che, per il fatto che la geometria di $X \subset \mathbb{R}^2$ può essere molto complicata, la risposta non sarà così semplice come nel caso di \mathbb{R} .

Teorema di Fubini–Tonelli

Una prima risposta ai problemi precedenti si può avere quando X ha due lati paralleli agli assi cartesiani.

DEFINIZIONE 10.4. Un insieme $X \subset \mathbb{R}^2$, limitato, si dice

(i) *y-sempllice* se esistono due funzioni continue $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

(ii) *x-sempllice* se esistono due funzioni continue $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

(iii) *sempllice* se è *y-sempllice* o *x-sempllice*

(iv) *regolare* se è l'unione di un numero finito di domini semplici.

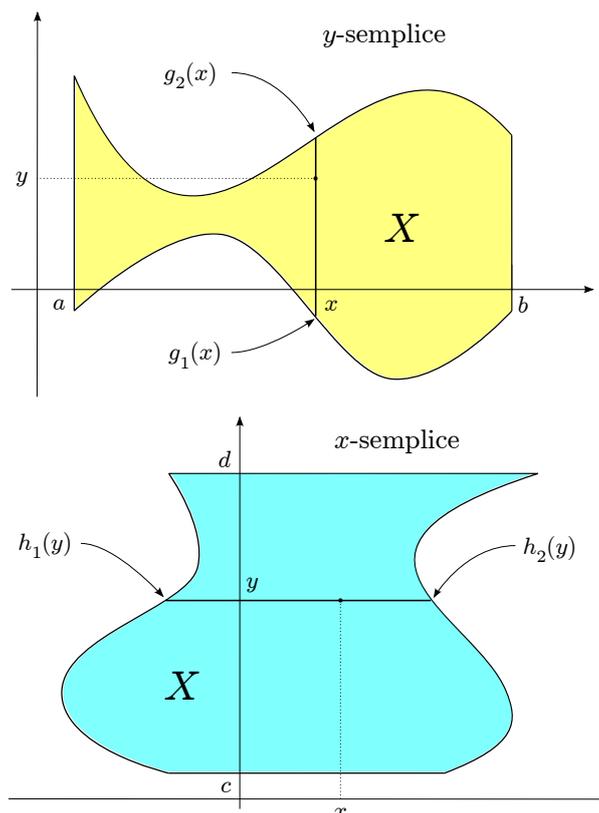


FIGURA 85. Domini *y-* e *x-sempllici*.

OSSERVAZIONE. Si osservi che un dominio è *y* sempllice se è un quadrangolo con due lati paralleli all'asse *y* e gli altri due lati dati dai grafici delle funzioni g_1 e g_2 (analogamente per domini *x-sempllici*).

L'idea del seguente teorema di Fubini-Tonelli è quella di ridurre il calcolo dell'integrale doppio al calcolo in successione di due integrali in una variabile.

TEOREMA 10.5 (Teorema di Fubini-Tonelli). Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e X un insieme sempllice. Allora f è integrabile su X . Inoltre

(i) se X è *y-sempllice*

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

(ii) se X è *x-sempllice*

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

OSSERVAZIONE (*Interpretazione geometrica di Fubini–Tonelli*). Sia X y -semplice. Per $x \in [a, b]$ fissato, si ponga

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

$A(x)$ rappresenta l'area della regione contenuta nel piano (x, y, z) , x fissato, e sottesa al grafico della funzione $F(y) := f(x, y)$ per $y \in [g_1(x), g_2(x)]$, cfr. Figura 86. La quantità

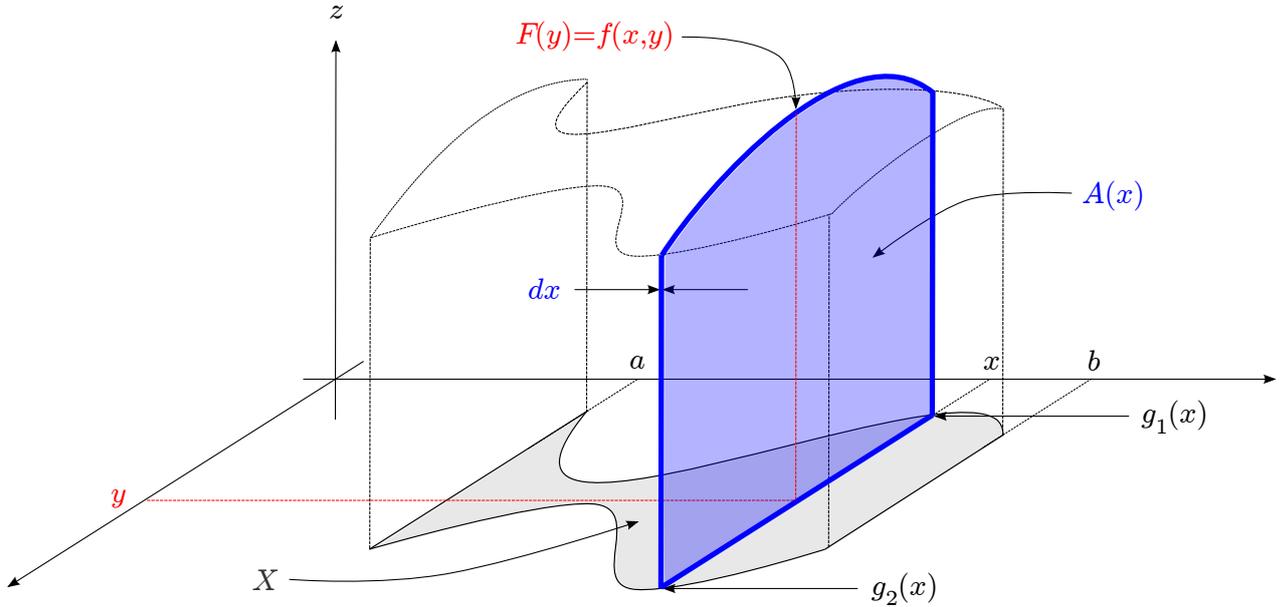


FIGURA 86. Il teorema di Fubini–Tonelli per X y -semplice.

$A(x)dx = dV$ rappresenta il volume che si ottiene per uno spostamento infinitesimo della variabile x . Integrando rispetto $x \in [a, b]$, riotteniamo il volume complessivo e quindi $\iint_X f(x, y) dx dy$.

ESEMPIO. Calcolare

$$\iint_X 2x^2y dx dy \quad \text{ove} \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x + 1 \leq y \leq 2\}.$$

Il dominio si presenta già nella forma di un dominio y -semplice (si osservi che X è anche x -semplice, infatti $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, 2], 0 \leq x \leq y - 1\}$). Quindi

$$\begin{aligned} \iint_X 2x^2y dx dy &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x+1}^2 2x^2y dy \right) dx = \int_{x=0}^1 2x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x+1}^2 dx \\ &= \int_{x=0}^1 (4x^2 - x^4 - 2x^3 - x^2) dx = \left[4\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^1 = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Si osservi che nell'integrale $\int_{x+1}^2 2x^2y dy$, poiché l'integrazione è fatta rispetto alla variabile y , la variabile x si può considerare come una costante.

ESEMPIO. Calcolare

$$\iint_X \sin(y^3) dx dy \quad \text{ove} \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \sqrt{x} \leq y \leq 1\}.$$

Anche in questo caso, il dominio si presenta già nella forma di un dominio y -semplice, tuttavia se applichiamo la formula per domini y -semplici

$$\iint_X \sin(y^3) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3) dy \right) dx$$

la funzione integranda $\sin(y^3)$ non è integrabile elementarmente rispetto y . Osserviamo che il dominio è anche x -semplice, infatti $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], 0 \leq x \leq y^2\}$.

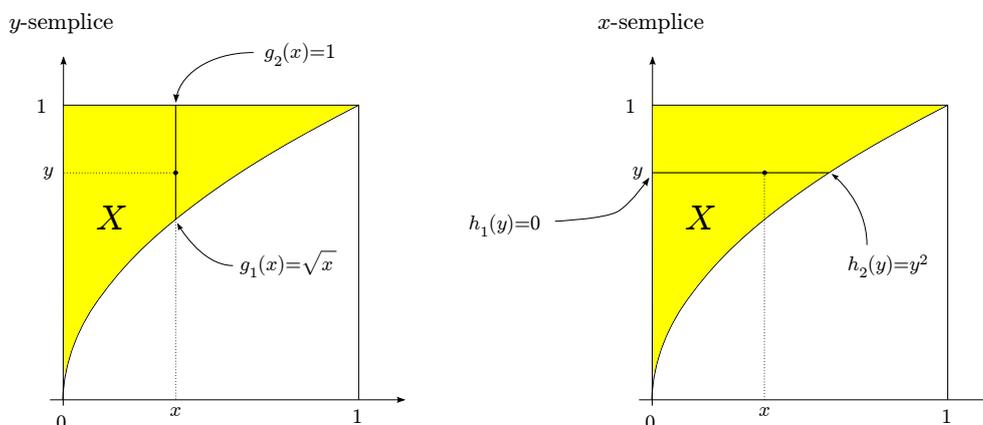


FIGURA 87. Dominio y - e x -semplice.

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_X \sin(y^3) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sin(y^3) dx \right) dy = \int_0^1 [x]_0^{y^2} \sin(y^3) dy = \int_0^1 y^2 \sin(y^3) dy \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos(y^3) \right]_0^1 = \frac{1}{3}(1 - \cos(1)) \end{aligned}$$

Quindi in alcuni casi può essere conveniente vedere il dominio come semplice rispetto ad una variabile piuttosto che all'altra.

OSSERVAZIONE. Si osservi che dal teorema di Fubini–Tonelli segue che se $X = [a, b] \times [c, d]$ e $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, allora

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

Cambiamento di Variabili negli Integrali Doppi

Il risultato seguente estende al caso degli integrali doppi la formula di integrazione per sostituzione che abbiamo visto per gli integrali di funzioni reali, cfr. pagina 96.

TEOREMA 10.6. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e sia

$$\begin{aligned} \varphi : X' \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (x, y) \end{aligned}$$

una trasformazione regolare di coordinate tale che $\varphi(X') = X$. Allora

$$\boxed{\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_{X'} f(\varphi(u, v)) |\det J_\varphi(u, v)| du dv}$$

ove J_φ è la Jacobiana della trasformazione φ .

OSSERVAZIONE. Si osservi che dal teorema sulla invertibilità locale della Jacobiana (cfr. pagina 135) segue per $\varphi(u, v) = (x, y)$

$$\det J_\varphi(u, v) = \det(J_{\varphi^{-1}}(x, y)) = \frac{1}{\det J_{\varphi^{-1}}(x, y)}.$$

OSSERVAZIONE (*Giustificazione geometrica*). In prima approssimazione vale

$$\begin{aligned}\varphi(u+du, v) &\approx \varphi(u, v) + \varphi_u(u, v) \cdot du \\ \varphi(u, v+dv) &\approx \varphi(u, v) + \varphi_v(u, v) \cdot dv \\ \varphi(u+du, v+dv) &\approx \varphi(u, v) + \varphi_u(u, v) \cdot du + \varphi_v(u, v) \cdot dv\end{aligned}$$

Inoltre, se $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, abbiamo

$$w_1 := \varphi_u \cdot du = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot du \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \cdot du \end{pmatrix}, \quad w_2 := \varphi_v \cdot dv = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \cdot dv \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \cdot dv \end{pmatrix}.$$

Visto che l'area del parallelogramma generato da w_1 e w_2 è dato da $|\det(w_1, w_2)|$ (cfr. corso di Geometria), dalla linearità del determinante in ogni colonna segue

$$dA' = |\det(w_1, w_2)| = |\det J_\varphi(u, v)| \cdot du \, dv.$$

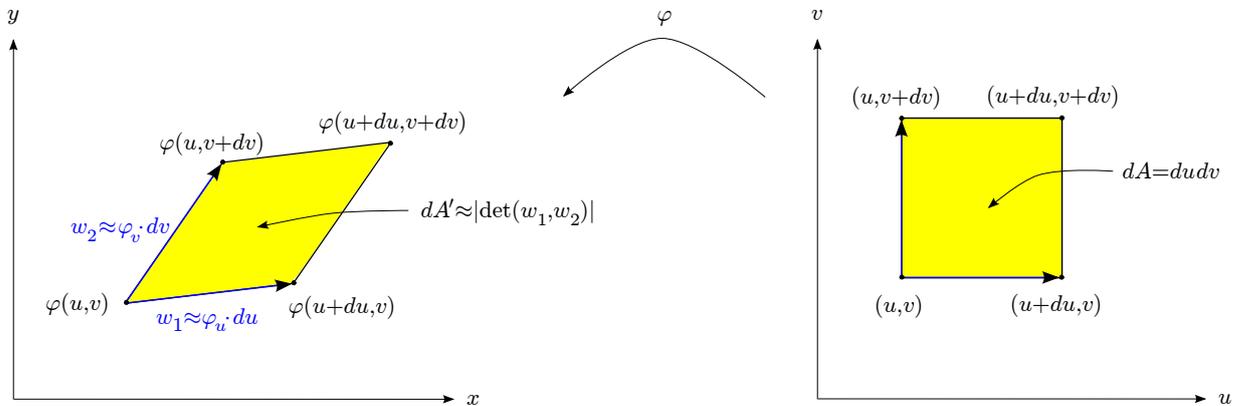


FIGURA 88. Cambiamento di variabili.

Come abbiamo visto a pagina 135, nel caso specifico delle *coordinate polari* otteniamo $\det J_\varphi = \rho$ e quindi

$$dA' = \rho \cdot d\rho \, d\vartheta$$

come dimostra anche Figura 89.

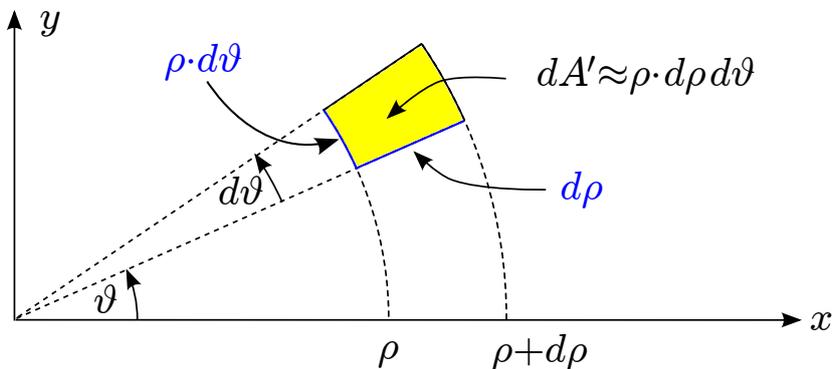


FIGURA 89. Cambiamento di variabili per coordinate polari.

ESEMPIO. Calcolare

$$\iint_X xy \, dx \, dy \quad \text{ove } X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

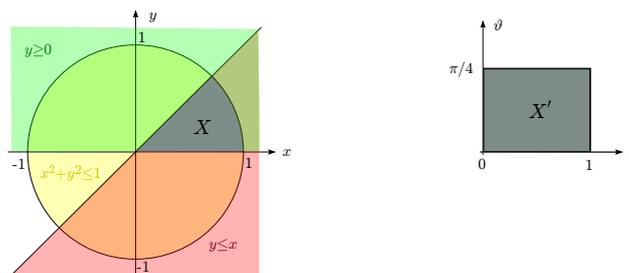


FIGURA 90. Dominio in coordinate cartesiane e polari.

In questo tipo di problemi è opportuna dapprima disegnare il grafico.

Si osserva che il dominio è semplice. Però il dominio essendo un settore circolare, è facilmente rappresentabile in coordinate polari come

$$X' = \{(\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) : 0 \leq \rho \leq 1, \vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]\} = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{4}].$$

Quindi possiamo vedere $X = \varphi(X')$ ove φ è la trasformazione del piano indotta dalle coordinate polari. Dal teorema precedente, ricordando che $\det J_\varphi(\rho, \vartheta) = \rho$ (vedi pagina 135), si ha (è importante non dimenticare il termine $|\det J_\varphi| = \rho$!!)

$$\iint_X xy \, dx \, dy = \iint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{4}]} \rho \cos(\vartheta) \cdot \rho \sin(\vartheta) \cdot \rho \, d\rho \, d\vartheta$$

Cioè il dominio X' nel piano (ρ, ϑ) è un rettangolo, quindi ricordando l'osservazione su pagina 143, si ha

$$\begin{aligned} \iint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{4}]} \rho^3 \cdot \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \, d\rho \, d\vartheta &= \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \, d\vartheta = \\ &= \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \cdot \left[\frac{\sin^2(\vartheta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

ESEMPIO. Calcolare

$$\iint_X (x + y) \, dx \, dy \quad \text{ove} \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0, 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2\}.$$

Si osservi che non è facile esprimere X come dominio semplice. Invece è più facile introdurre le variabili $u = xy, v = \frac{y}{x}$. Così si ottiene che il dominio di integrazione nelle nuove variabili (u, v) è dato da $X' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\} = [1, 2] \times [1, 2]$, quindi è un quadrato nel piano (u, v) .

Avendo data la trasformazione $\varphi^{-1} : (x, y) \mapsto (u, v) = (xy, \frac{y}{x})$, dobbiamo prima trovare $\varphi : (u, v) \mapsto (x, y) = \varphi(u, v)$. Da

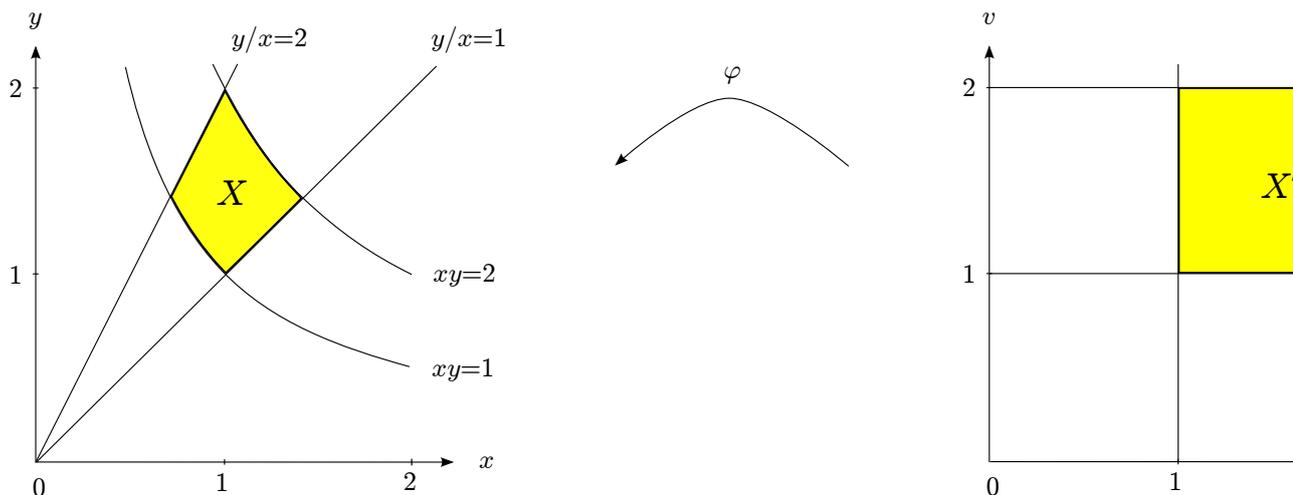
$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

ricavando prima x nella prima equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene

$$\varphi(u, v) = (x, y) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right).$$

Ciò implica

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}$$

FIGURA 91. Dominio in coordinate cartesiane e (u, v) .

quindi $\det J_\varphi(u, v) = \frac{1}{2v}$. Da cui

$$\begin{aligned} \iint_X (x+y) dx dy &= \iint_{[1,2] \times [1,2]} \left(\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv} \right) \frac{1}{2v} du dv \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2v} \left(\int_1^2 \sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv} du \right) dv = \int_1^2 \left[\frac{2}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{v}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \sqrt{v} \right]_1^2 dv \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1) \int_1^2 \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} dv = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1) \left[-2 \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} + 2\sqrt{v} \right]_1^2 \\ &= \dots = \frac{1}{3} (4 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

ALTRI ESEMPI. • Calcolare la misura $|X|$ del dominio $X \subset \mathbb{R}^2$ che in coordinate polari è data da

$$X' = \{(\rho, \vartheta) : \vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1], 0 \leq \rho \leq R(\vartheta)\}$$

per una funzione continua $R : [\vartheta_0, \vartheta_1] \rightarrow [0, +\infty)$, cfr. Figura 92.

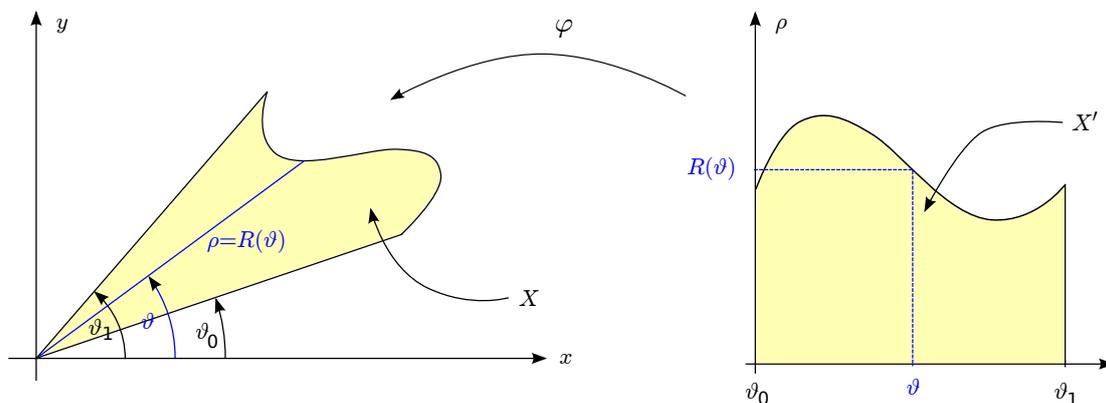


FIGURA 92. Dominio in coordinate cartesiane e polari.

Visto che il dominio X' è ρ -semplice, passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned} |X| &= \iint_X 1 \, dx \, dy = \iint_{X'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \\ &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \int_0^{R(\vartheta)} \rho \, d\rho \, d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=R(\vartheta)} d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} R^2(\vartheta) \, d\vartheta. \end{aligned}$$

Per dare un'esempio concreto calcoliamo l'area della *spirale di Archimede* data in coordinate polari da $X' := \{(\rho, \vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi], 0 \leq \rho \leq \vartheta\}$, cfr. Figura 93.

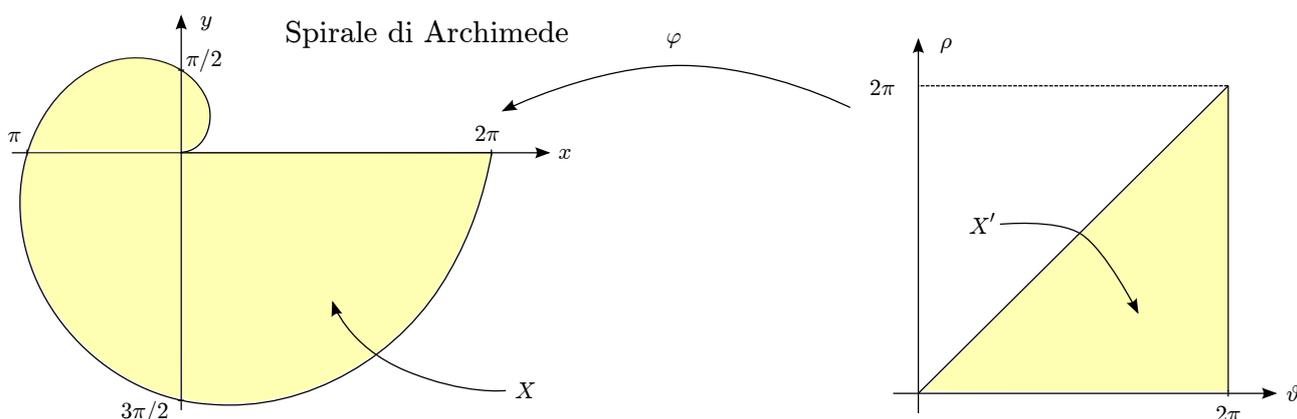


FIGURA 93. La spirale di Archimede.

In questo caso $R(\vartheta) = \vartheta$ e quindi otteniamo

$$|X| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \vartheta^2 \, d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \cdot \pi^3.$$

- Calcolare

$$I_R := \iint_{X_R} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \quad \text{per} \quad X_R := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Per risolvere l'integrale passiamo alle coordinate polari. Visto che il cerchio X_R in coordinate cartesiane corrisponde al rettangolo $X'_R = [0, R] \times [0, 2\pi]$ in coordinate polari risulta (usando l'osservazione a pagina 143)

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho \, d\vartheta \, d\rho = \int_0^R e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta \\ &= -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \cdot 2\pi \Big|_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = \pi$. Visto che per $R \rightarrow +\infty$ (in un certo senso) $X_R \rightarrow \mathbb{R}^2 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ "segue" (usando di nuovo l'osservazione a pagina 143)

$$\begin{aligned} \pi &= \iint_{(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2. \end{aligned}$$

Quindi siamo riusciti a calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

che non è possibile usando una primitiva di e^{-x^2} , cfr. l'osservazione a pagina 101. Invece, passando alle coordinate polari, grazie al fattore $\rho = \det(J_\varphi)$, si passa da e^{-x^2} a $\rho \cdot e^{-\rho^2}$ che è molto semplice da integrare.

Integrali Tripli

In questa sezione ci occupiamo del calcolo degli integrali tripli

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

per una funzione $f : X \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Interpretando $f(x, y, z)$ come densità di un corpo $X \subset \mathbb{R}^3$ nel punto (x, y, z) , tale integrale rappresenta la massa totale m del corpo.

Per quanto riguarda la definizione di integrabilità e di integrale si può ripetere una costruzione simile a quella per gli integrali doppi, definendo prima l'integrale in un parallelepipedo che si può facilmente suddividere attraverso una partizione in parallelepipedi. Quindi definendolo in un generico insieme X considerando un parallelepipedo contenente l'insieme ed estendendo la funzione a 0 fuori da X . Valgono le stesse proprietà degli integrali doppi cfr. pagina 140.

Per un insieme $X \subset \mathbb{R}^3$, la sua *misura* (= volume) si definisce

$$|X| := \iiint_X 1 \, dx \, dy \, dz \quad (:= \text{misura di } X)$$

Teorema di Fubini–Tonelli in \mathbb{R}^3 . Vediamo come si estende al caso degli integrali tripli la formula di Fubini–Tonelli. Come visto per gli integrali doppi, le formule di Fubini–Tonelli riconducono il calcolo di un integrale dato attraverso il calcolo di integrali in dimensione più bassa.

DEFINIZIONE 10.7. Un insieme $X \subset \mathbb{R}^3$, limitato, si dice

- (i) *z-sempllice* se esistono due funzioni continue $g_1, g_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

(analoghe definizioni per insiemi *y-sempllici* o *x-sempllici*).

- (ii) *sempllice* se è *z-sempllice*, *y-sempllice* o *x-sempllice*

Si osservi che un dominio *z-sempllice* è un cilindro con la superficie laterale “parallela” all'asse z e le basi date dai grafici di g_1 e g_2 .

TEOREMA 10.8 (Integrazione per fili). Sia $f : X \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e X un insieme *sempllice*. Allora f è integrabile su X . Inoltre se X è *z-sempllice*

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_D \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy$$

(analoghe formule per un insieme *y-sempllice* o *x-sempllice*).

Per risolvere l'integrale triplo dobbiamo quindi calcolare l'integrale nella variabile z tra le parentesi tonde (integrazione sul filo, cfr. grafico), e quindi un integrale doppio nelle variabili x, y (sommando i contributi di tutti i fili).

ESEMPIO. Calcolare $\iiint_X z \, dx \, dy \, dz$ ove $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Si ha

$$\begin{aligned} \iiint_X z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}} \left(\int_0^{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} z \, dz \right) \, dx \, dy = \\ &= \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}} \frac{1}{2} (1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

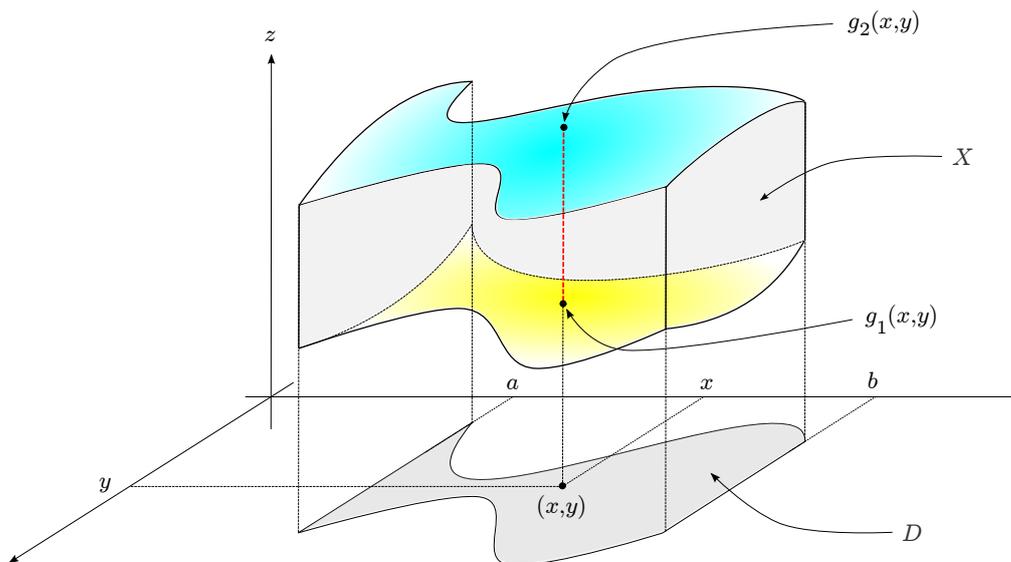


FIGURA 94. Integrazione per fili.

Per risolvere l'ultimo l'integrale possiamo utilizzare il cambiamento di variabili in coordinate polari. In coordinate polari il cerchio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ corrisponde al quadrato $\{(\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$. Quindi

$$\int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 dx dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - \rho)^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi \int_0^1 (\rho^3 - 2\rho^2 + \rho) d\rho = \frac{1}{12}$$

Vediamo ora un'altra tecnica di riduzione per il calcolo degli integrali tripli. Assumiamo che il nostro insieme X si possa rappresentare nella forma

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], (x, y) \in D_z\}$$

ove per ogni z fissato, D_z (strato) è un insieme del piano su cui $f(x, y, z)$ è integrabile rispetto (x, y) . In altre parole X è l'unione degli strati D_z al variare di $z \in [a, b]$.

TEOREMA 10.9 (*Integrazione per strati*). Sia $f : X \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], (x, y) \in D_z\}$. Allora

$$\boxed{\iiint_X f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.}$$

Quindi calcoliamo prima un integrale doppio (integrazione su ogni strato) e poi un integrale in z (sommando i contributi di tutti gli strati). Analoghe formula si hanno quando gli strati si presentano rispetto alla variabile x o y .

ESEMPIO. Calcolare $\iiint_X x^2 + y^2 dx dy dz$ ove $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq z^2\}$. In questo caso gli strati sono gli insiemi $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$, cioè cerchi di centro $(0, 0)$ e raggio z .

$$\iiint_X x^2 + y^2 dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_{\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq z^2\}} x^2 + y^2 dx dy \right) dz$$

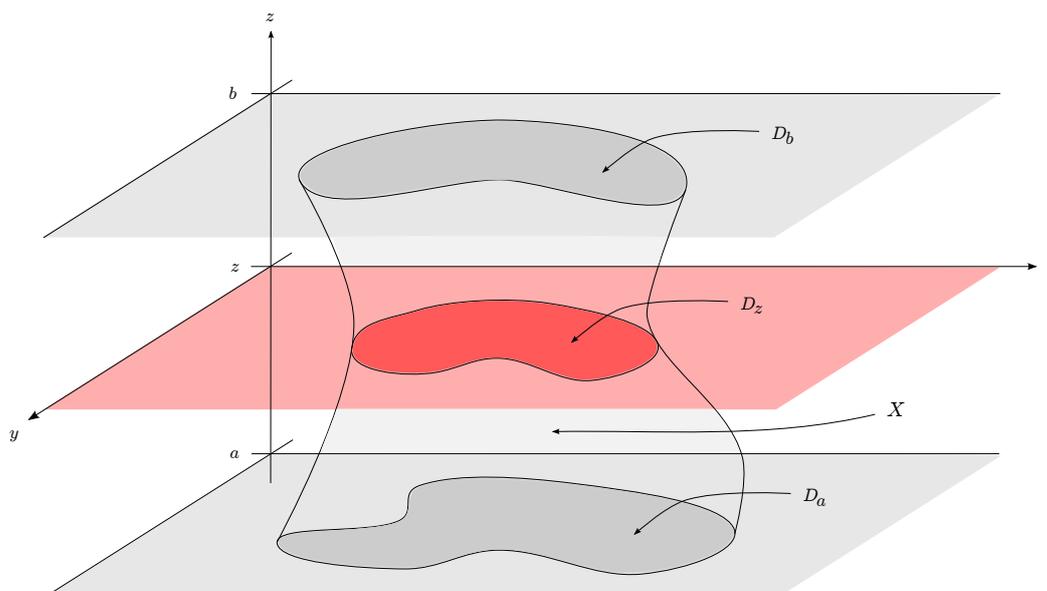


FIGURA 95. Integrazione per strati.

L'integrale tra parentesi tonde si può facilmente risolvere attraverso le coordinate polari. Quindi

$$\begin{aligned} \iiint_X x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^z \rho^3 \, d\rho \right) dz = \\ &= \int_0^1 2\pi \frac{z^4}{4} dz = \pi \left[\frac{z^5}{10} \right]_0^1 = \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

Consideriamo un'altro esempio che risolveremo sia con integrazione per fili sia per strati.

ESEMPIO. Calcolare la massa m di un tetraedro con i vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ e la densità $f(x, y, z) = 1 - z$ nel punto (x, y, z) .

Allora i punti appartenendo al tetraedro sono dati da

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

e quindi abbiamo

$$m = \iiint_X (1 - z) \, dx \, dy \, dz.$$

Questo integrale si può risolvere in entrambi i modi.

Soluzione con integrazione per fili. Come si vede dal grafico il dominio X è z -semplice:

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1 - x - y\} \quad \text{con} \\ D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], 0 \leq x \leq 1 - y\}. \end{aligned}$$

Quindi risulta

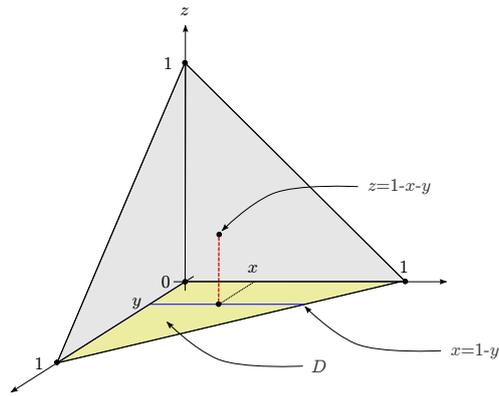


FIGURA 96. Esempio integrazione per fili.

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_D \left(\int_0^{1-x-y} (1-z) dz \right) dx dy = \iiint_D \left(\left(z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dz \right) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \left(1-x-y - \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^2}{2} + \frac{(1-x-y)^3}{6} \right) \Big|_{x=0}^{x=1-y} dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^2}{2} - \frac{(1-y)^3}{6} \right) dy = \left(\frac{-(1-y)^3}{6} - \frac{(1-y)^4}{24} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

□

Soluzione con integrazione per strati. Come si vede dal grafico il dominio X si può scomporre negli strati

$$D_z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in [0, 1-z], 0 \leq x \leq 1-y-z\}, \quad z \in [0, 1].$$

Quindi risulta

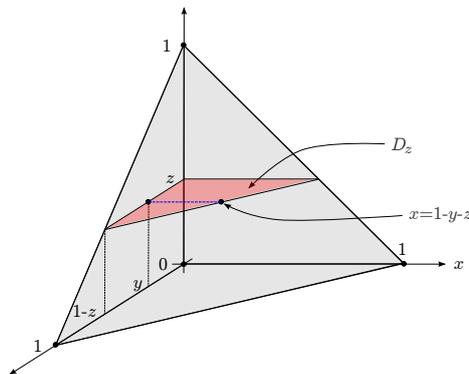


FIGURA 97. Esempio integrazione per strati.

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \left(\iint_{D_z} (1-z) dx dy \right) dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} (1-z) dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} x \cdot (1-z) \Big|_{x=0}^{x=1-y-z} dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-y-z) \cdot (1-z) dy dz \\
&= \int_0^1 (1-z) \cdot \frac{-(1-y-z)^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1-z} dz = \int_0^1 (1-z) \cdot \frac{(1-z)^2}{2} dz \\
&= -\frac{(1-z)^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

□

Ricordiamo infine che anche in \mathbb{R}^3 vale la formula di cambiamento delle variabili per integrali tripli

TEOREMA 10.10. *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e sia*

$$\begin{aligned}
\varphi : X' \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u, v, w) &\mapsto (x, y, z) = \varphi(u, v, w)
\end{aligned}$$

una trasformazione regolare di coordinate tale che $\varphi(X') = X$. Allora

$$\boxed{\iint\iint_X f(x, y, z) dx dy dz = \iint\iint_{X'} f(\varphi(u, v, w)) |\det J_\varphi(u, v, w)| du dv dw}$$

ove J_φ è lo Jacobiano della trasformazione φ .

ESEMPIO. Vediamo un'applicazione della formula precedente al calcolo del volume della sfera di raggio R . Quindi vogliamo calcolare $\iiint_X 1 dx dy dz$ ove $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. La sfera si può descrivere in coordinate sferiche come l'insieme $X' = \{(\rho, \vartheta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] : \rho \leq R, \vartheta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi]\}$. Ricordando che il determinante dello Jacobiano della trasformazione in coordinate sferiche è dato da $\det J_f(\rho, \vartheta, \varphi) = \rho^2 \sin(\varphi)$ (vedi pagina 137) si ha

$$\begin{aligned}
\iiint_X 1 dx dy dz &= \iiint_{\{(\rho, \vartheta, \varphi) : \rho \leq R, \vartheta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi]\}} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\vartheta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi = 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R [-\cos(\varphi)]_0^\pi = 4\pi \frac{R^3}{3}
\end{aligned}$$

ESEMPIO. Calcolare il volume del cono di altezza h e raggio r $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2, z \leq \frac{h}{r}(x^2 + y^2)^{1/2}\}$. Passando alle coordinate cilindriche (vedi pagina 136), il dominio si può descrivere come $X' = \{(\rho, \vartheta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} : \rho \in [0, r], \vartheta \in [0, \pi), t \leq \frac{h}{r}\rho\}$. Ricordando che lo Jacobiano delle coordinate cilindriche è dato da ρ , si ha

$$\begin{aligned}
\iiint_X 1 dx dy dz &= \iiint_{\{(\rho, \vartheta, t) : \rho \in [0, r], \vartheta \in [0, \pi), t \leq \frac{h}{r}\rho\}} \rho d\rho d\vartheta dt = \\
&= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^r \left(\int_0^{\frac{h}{r}\rho} \rho dt \right) d\rho = \pi \int_0^r \frac{h}{r} \rho^2 d\rho = 2\pi \left[\frac{h \rho^3}{r \cdot 3} \right]_0^r = 2\pi \frac{hr^3}{3}
\end{aligned}$$

I numeri complessi

In questo capitolo introduciamo la definizione ed alcune proprietà dei numeri complessi. Nell'insieme $\mathbb{R}^2 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ consideriamo le operazioni di somma e prodotto così definite

$$(0.1) \quad (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(0.2) \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

La terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo. Tale campo viene detto il *campo dei numeri complessi* ed indicato con il simbolo \mathbb{C} .

OSSERVAZIONE. Si può verificare facilmente che la coppia $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono rispettivamente l'elemento neutro rispetto alla somma e rispetto al prodotto, cioè $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$ e, se $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$. Inoltre

$$(a, b) + (-a, -b) = 0 \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \neq (0, 0)$$

cioè $(-a, -b)$ e $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ sono rispettivamente l'opposto e l'inverso (se $(a, b) \neq (0, 0)$) di (a, b) . Le altre proprietà caratterizzanti un campo (commutativa, associativa, distributiva) si verificano facilmente.

L'insieme dei reali come sottoinsieme di \mathbb{C} . Nel campo dei numeri complessi \mathbb{C} consideriamo il sottoinsieme

$$\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

L'insieme \mathbb{C}_0 può essere messo in corrispondenza con \mathbb{R} associando alla coppia $(a, 0)$ il numero reale a . Inoltre in \mathbb{C}_0 le operazioni di somma e prodotto definite in (0.1)-(0.2) si riducono alle corrispondenti operazioni definite in \mathbb{R} . Infatti

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Quindi l'insieme $(\mathbb{C}_0, +, \cdot)$ può essere identificato con il campo dei numeri reali e risulta essere un sotto-campo del campo dei numeri complessi \mathbb{C} .

L'unità immaginaria e la forma algebrica. Consideriamo la coppia $(0, 1) \in \mathbb{C}$ e osserviamo che

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) := a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

avendo identificato le coppie $(a, 0)$, $(b, 0)$ con i numeri reali a , b e la coppia $(0, 1)$ con il simbolo i . La rappresentazione di un numero complesso nella forma $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, si dice *forma algebrica* dei numeri complessi. Il numero a si dice *parte reale* di z e si indica con il simbolo $\Re(z)$, mentre il numero b si dice *parte immaginaria* di z e si indica con il simbolo $\Im(z)$.

Osservando che

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

possiamo calcolare facilmente somma e prodotto di numeri complessi $z = a+ib$, $w = c+id$

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + b) + i(c + d)$$

$$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

o equivalentemente

$$\Re(z + w) = \Re(z) + \Re(w), \Im(z + w) = \Im(z) + \Im(w)$$

$$\Re(z \cdot w) = \Re(z)\Re(w) - \Im(z)\Im(w), \Im(z \cdot w) = \Re(z)\Im(w) + \Im(z)\Re(w)$$

ESEMPIO. Si ha

$$(3 + 4i) + (7 + 8i) = 10 + 12i$$

$$(3 + 4i) \cdot (7 + 8i) = -11 + 52i$$

Piano di Gauss. Possiamo identificare il numero complesso $z = a + ib$ con il punto del piano di coordinate (a, b) . Si noti che l'asse delle ascisse corrisponde ai numeri reali (i.e. $b = 0$), mentre l'asse delle ordinate agli immaginari puri (i.e. $a = 0$). La rappresentazione geometrica dei numeri complessi nel piano euclideo viene detta rappresentazione nel *piano di Gauss*.

Nel piano di Gauss l'addizione di due numeri complessi corrisponde alla somma tra i vettori che li rappresentano ottenuta attraverso la regola del parallelogramma.

Coniugato e modulo di un numero complesso. Introduciamo la definizione di coniugato e modulo di un numero complesso.

DEFINIZIONE 11.1. Dato $z = a + ib$, si definisce *coniugato di z* il numero complesso \bar{z} definito da

$$\bar{z} = a - ib$$

ESEMPIO.

$$\text{Se } z = 4 + 3i, \text{ allora } \bar{z} = 4 - 3i;$$

$$\text{se } z = -i, \text{ allora } \bar{z} = i;$$

$$\text{se } z = -4, \text{ allora } \bar{z} = -4.$$

OSSERVAZIONI. Per il coniugato valgono le seguenti proprietà:

Se $z, w \in \mathbb{C}$, allora

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$;
- Se $z = a + ib$, allora $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

(verificare per esercizio le proprietà precedenti attraverso la definizione di coniugato)

DEFINIZIONE 11.2. Dato $z = a + ib$, si definisce *modulo di z* il numero reale $|z|$ definito da

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si osservi che per i numeri reali ritroviamo la definizione di modulo data in \mathbb{R} . Infatti se $z = a$, allora $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$.

Nel piano di Gauss $|z|$ rappresenta la distanza di $z = a + ib$ dall'origine, cioè la lunghezza del segmento che congiunge il punto di coordinate (a, b) con $(0, 0)$

ESEMPIO.

$$\text{Se } z = 4 + 3i, \text{ allora } |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$$

$$\text{se } z = -i, \text{ allora } |z| = 1;$$

$$\text{se } z = -4, \text{ allora } |z| = 4.$$

OSSERVAZIONI. Per il modulo valgono le seguenti proprietà:

Se $z, w \in \mathbb{C}$, allora

- $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $|z| = |\bar{z}|$.
- $|-z| = |z|$ e $||z|| = |z|$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*disuguaglianza triangolare*).
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

(verificare per esercizio le proprietà precedenti attraverso la definizione di modulo)

ESERCIZIO.

- Scrivere in forma algebrica i numeri complessi

$$(3 + 2i) \cdot (6 + i), \quad \frac{1 + i}{1 - i}, \quad \frac{3 + 2i}{3 - 2i}.$$

- Trovare modulo e coniugato dei numeri precedenti.
- Riportare i numeri precedenti nel piano di Gauss.

Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso

Richiamiamo brevemente la definizione di coordinate polari. Un punto del piano Euclideo si può rappresentare sia attraverso le coordinate cartesiane sia attraverso le coordinate polari (ρ, ϑ) ove

- $\rho \in [0, +\infty)$ rappresenta la distanza del punto dall'origine;
- $\vartheta \in [0, 2\pi)$ rappresenta l'angolo (in radianti) che il vettore posizione del punto forma con l'asse delle ascisse.

Le formule di passaggio da coordinate cartesiane (a, b) a coordinate polari (ρ, ϑ) e viceversa sono date da

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan(\vartheta) = \frac{b}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \rho \cos(\vartheta) \\ b = \rho \sin(\vartheta) \end{cases}$$

(si ricordi che la tangente non è invertibile in $[0, 2\pi)$).

Dato $z = a + ib$, utilizzando le formule di passaggio precedenti si ottiene la *forma trigonometrica di un numero complesso*

$$z = \rho(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)).$$

L'angolo ϑ è detto *argomento di z* e si denota con $\arg(z)$, mentre, come già visto, ρ coincide con il *modulo di z* .

ESEMPIO. Se $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$, allora

$$\begin{aligned} \rho = |z| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \\ \tan(\vartheta) = 1 &\Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

quindi la forma trigonometrica di z è

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Analogamente

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad 1 = \cos(0) + i \sin(0)$$

Utilizzando la forma trigonometrica di un numero complesso e proprietà delle funzioni trigonometriche si possono dimostrare le seguenti formule per il prodotto e il rapporto

di numeri complessi:

Se $z_1 = \rho_1(\cos(\vartheta_1) + i \sin(\vartheta_1))$, $z_2 = \rho_2(\cos(\vartheta_2) + i \sin(\vartheta_2))$, allora

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2))$$

o, equivalentemente,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2),$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Dalle formule precedenti segue subito la *formula di De Moivre*

$$z^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ESEMPIO. Per calcolare $(1+i)^7$, rappresentiamo il numero $1+i$ in forma trigonometrica, quindi

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Dalla formula di De Moivre si ha

$$\begin{aligned} (1+i)^7 &= 2^{7/2} \left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) \right) \\ &= 2^{7/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 8 - 8i \end{aligned}$$

Ricordiamo infine la formula di Eulero che lega le funzioni trigonometriche e la funzione esponenziale complessa

$$(0.3) \quad e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Dalla formula di Eulero (0.3) seguono subito le due identità

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta) &= \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \\ \sin(\vartheta) &= \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \end{aligned}$$

Radici di un numero complesso

Introduciamo la definizione di radice n -sima di un numero complesso

DEFINIZIONE 11.3. Dato $n \in \mathbb{N}$, diremo che z è una radice n -sima di $w \in \mathbb{C}$ se $w = z^n$.

PROPOSIZIONE 11.4. Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, allora esistono sempre n radici n -sime di w . Se $w = r(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$, allora tali radici sono date da

$$z_k = \rho (\cos(\vartheta_k) + i \sin(\vartheta_k)), \quad k = 0, \dots, n-1$$

ove

$$(0.4) \quad \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \vartheta_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Posto $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ allora dalla formula di De Moivre, $z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. Quindi, se $w = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$, allora $z^n = w$ se e solo se

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\varphi = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

da cui, osservando che nella seconda identità per la periodicità delle funzioni trigonometriche si ottengono valori distinti solo per $k = 0, \dots, n-1$, otteniamo le formule (0.4). \square

ESEMPIO. Per calcolare $\sqrt[3]{i}$, dapprima riportiamo i in forma trigonometrica. Quindi $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$, cioè $r = 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Quindi le radici cubiche di i sono date da

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

cioè

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_1 &= \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 &= \cos\left(\frac{9}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{6}\pi\right) = -1 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. Rappresentando le radici n -sime di w nel piano di Gauss, si può osservare che esse sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di centro 0 e raggio $|w|^{1/n}$.

Concludiamo con il *Teorema Fondamentale dell'Algebra*

TEOREMA 11.5. *L'equazione algebrica*

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

ove $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ ammette n radici in \mathbb{C} ove tali radici siano contate con la loro molteplicità.

Note

Testi consigliati: A. Marson, P. Baiti, F. Ancona, B. Rubino: *Corso di Analisi Matematica 1*, Carocci editore;

C.D. Pagani, S. Salsa: *Analisi Matematica 1*, Zanichelli;

P. Marcellini, C. Sbordone: *Esercitazioni di Matematica*, Liguori Editore;

S. Salsa, A. Squellati: *Esercizi di Matematica*, Zanichelli.

APPENDICE A

Appendice

Tre Principali Modi di Dimostrazioni

Siano A e B due affermazioni e siano $\neg A$ e $\neg B$ le loro negazioni. Allora sono equivalenti

- $A \Rightarrow B$;
- $\neg B \Rightarrow \neg A$;
- A e $\neg B \Rightarrow \text{f}$.

Quindi per dimostrare che $A \Rightarrow B$ ci sono i seguenti 3 modi:

dimostrazione diretta: $A \Rightarrow B$;

dimostrazione indiretta: $\neg B \Rightarrow \neg A$;

dimostrazione per assurdo: A con $\neg B \Rightarrow \text{f}$.

ESEMPIO. Sia A l'affermazione “*piove*” e B l'affermazione “*la strada è bagnata*”, allora evidentemente vale $A \Rightarrow B$. Invece *non* vale il contrario, cioè $B \not\Rightarrow A$, in quanto non è detto che piove se la strada è bagnata. Quindi in questo esempio

- $A \Rightarrow B$ significa “*se piove, allora la strada si bagna*” che è vero.
- $\neg B \Rightarrow \neg A$ significa “*se la strada non è bagnata, allora non piove*” che è vero.
- A e $\neg B \Rightarrow \text{f}$ significa “*piove e la strada non è bagnata*” che infatti è una contraddizione.

Elenco di alcuni Limiti Notevoli

Successioni.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ 0 & \text{se } |q| < 1, \\ \cancel{\exists} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0, \\ 1 & \text{se } \alpha = 0, \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}, q > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{più in generale}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a \quad \text{se } |x_n| \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{b_n} = a^b \quad \text{se } a_n \rightarrow a > 0 \text{ e } b_n \rightarrow b \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Funzioni.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{più in generale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \quad \text{per ogni } a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{più in generale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e) \quad \text{per ogni } 0 < a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = e^t \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad \text{per ogni } r \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } 0 < a \neq 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \log_a(x) = 0 \quad \text{per ogni } 0 < a \neq 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

Definizione alternativa dei Limiti per Funzioni

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione del dominio X di f . Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \iff$$

- se $x_0, l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta.$$
- se $x_0 \in \mathbb{R}, l = +\infty$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta.$$
- se $x_0 \in \mathbb{R}, l = -\infty$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M < 0$ tale che

$$f(x) < M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta.$$
- se $x_0 = +\infty, l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $L > 0$ tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x > L.$$
- se $x_0 = -\infty, l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $L < 0$ tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x < L.$$
- se $x_0, l = +\infty$: Per ogni $M > 0$ esiste $L > 0$ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x > L.$$
- se $x_0 = +\infty, l = -\infty$: Per ogni $M < 0$ esiste $L > 0$ tale che

$$f(x) < M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x > L.$$
- se $x_0 = -\infty, l = +\infty$: Per ogni $M > 0$ esiste $L < 0$ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x < L.$$
- se $x_0 = -\infty, l = -\infty$: Per ogni $M < 0$ esiste $L < 0$ tale che

$$f(x) < M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x < L.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad \iff$$

- se $x_0, l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x - x_0 < \delta.$$
- se $x_0 \in \mathbb{R}, l = +\infty$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x - x_0 < \delta.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \quad \iff$$

- se $x_0, l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x_0 - x < \delta.$$
- se $x_0 \in \mathbb{R}, l = +\infty$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x_0 - x < \delta.$$

Elenco delle figure

1	Il grafico del modulo.	5
2	Modulo e distanze sulla retta reale	5
3	Il metodo di Erone.	16
4	Scala autoportante: 2 gradini.	20
5	Scala autoportante: 3 gradini.	20
6	Scala autoportante: $n + 1$ gradini.	21
7	Scala autoportante che supera (teoricamente) qualsiasi distanza.	21
8	Divergenza della serie armonica	25
9	Convergenza della serie di Leibniz.	25
10	Criterio di Leibniz: Stima dell'errore.	26
11	Grafico di $A(r)$.	28
12	Funzioni iniettive e suriettive	30
13	Grafico di $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.	30
14	Funzioni pari e dispari	31
15	La funzione potenza.	33
16	Funzione esponenziale di base a e funzione esponenziale.	33
17	Le funzioni iperboliche.	33
18	La catenaria.	33
19	Misura di angoli in radianti.	34
20	Definizione delle funzioni circolari.	34
21	Grafici di \sin , \cos e \tan .	34
22	La funzione segno	36
23	Relazione tra x , $\sin(x)$ e $\tan(x)$.	38
24	Il metodo di bisezione.	42
25	I Logaritmi.	43
26	Funzione continua con inversa discontinua.	44
27	La radice n -esima.	44
28	Inverse delle funzioni circolari.	45
29	Inverse delle funzioni iperboliche.	46
30	Retta secante e tangente.	47
31	Derivata della funzione inversa.	52
32	Contenitore.	54
33	Esempi di estremi locali.	55
34	Estremi locali e tangenti orizzontali.	55
35	Grafico di $f(x) = x^x$.	57
36	Volume contenitore da cartoncino formato A4.	57

37	Teorema di Rolle.	58
38	Teorema di Lagrange: Due punti di Lagrange c_1 e c_2 .	58
39	Criterio per estremi locali.	60
40	Grafico di $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.	60
41	Il resto $r(x)$.	63
42	I primi polinomi di Maclaurin di $f(x) = e^x$ e $f(x) = \sin(x)$ (cfr. p. 67).	66
43	Criterio per estremi locali.	70
44	Asintoto obliquo.	81
45	Funzioni convesse e concave.	82
46	Punti di flesso e no.	83
47	Studio di $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot x + 3 $.	86
48	L'area A .	87
49	Somma inferiore $s(f, P)$ e somma superiore $S(f, P)$.	88
50	Criterio per l'integrabilità.	88
51	Additività rispetto agli estremi di integrazione.	89
52	Integrazione di funzioni simmetrici.	90
53	Esempi di funzioni integrabili non continue.	90
54	Teorema della media.	91
55	La funzione integrale.	92
56	Area sotto il grafico.	93
57	Il logaritmo.	93
58	Calcolo di aree.	105
59	Calcolo dell'area tra due grafici.	105
60	Esempio: Calcolo dell'area tra due grafici.	106
61	Esempio: Calcolo dell'area tra due grafici.	106
62	Lunghezza di una curva.	107
63	Corpo di rotazione.	107
64	Integrali impropri.	108
65	Integrali impropri.	109
66	Integrali impropri.	110
67	Integrale improprio della "Campana di Gauss".	111
68	Integrale improprio convergente.	112
69	Integrali impropri e serie: $f(k) = a_k$.	113
70	La serie maggiore l'integrale.	113
71	L'integrale maggiore la serie.	114
72	Grafici di $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ e $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ per $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.	116
73	Linee di livello delle funzioni $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ e $f_2(x, y) = x^2 - y^2$	116
74	Grafico e linee di livello di $f(x, y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$	117
75	Coordinate polari.	120
76	Derivate parziali.	123
77	Piano tangente.	125
78	Derivata direzionale.	126
79	Grafico e linee di livello con gradiente.	127

80	Grafico di $f(x, y) = x^2 - y^2$.	129
81	Coordinate polari.	135
82	Coordinate Cilindriche.	136
83	Coordinate sferiche.	137
84	La misura di un'insieme.	140
85	Domini y - e x -semplici.	141
86	Il teorema di Fubini–Tonelli per X y -semplice.	142
87	Dominio y - e x -semplice.	143
88	Cambiamento di variabili.	144
89	Cambiamento di variabili per coordinate polari.	144
90	Dominio in coordinate cartesiane e polari.	145
91	Dominio in coordinate cartesiane e (u, v) .	146
92	Dominio in coordinate cartesiane e polari.	146
93	La spirale di Archimede.	147
94	Integrazione per fili.	149
95	Integrazione per strati.	150
96	Esempio integrazione per fili.	151
97	Esempio integrazione per strati.	151