Analisi Matematica I (A.A. 2014/2015)

Docente: Fabio Camilli

Esercizi su Insiemi numerici, Induzione, Successioni e Serie

Esercizio 1. Determinare, se esistono, il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore degli insiemi

$A := \left\{ \frac{(-1)^n}{2+n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ [max $= 1/2$, min $= -1/3$], $\quad B := \left\{ \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}^*$ [sup $= +\infty$, min $= 2$],

$C := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ [max $= 2$, inf $= -1$], $\quad D := \left\{ n^2 - \frac{3}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ [sup $= +\infty$, min $= -2$],

$E := \left\{ \frac{m}{n} - \frac{n}{m} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}$ [sup $= +\infty$, inf $= -\infty$], $\quad F := \left\{ \frac{|3-n|}{3+n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ [max $= 1$, min $= 0$].

(* Usare $x + \frac{1}{x} \geq 2$ per ogni $x > 0$.)

Esercizio 2. Verificare per induzione le seguenti affermazioni per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right), \qquad \sum_{k=2n+1}^{3n} k = \frac{n(5n+1)}{2},$$

$$n! \geq 2^{n-1}, \qquad \frac{6^{2n} - 3^n}{11} \quad \text{è un numero naturale.}$$

Esercizio 3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - \tfrac{2}{n}}\right), \ [R:\ 1/\sqrt{5}] \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}, \ [R:\ 1] \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}, \ [R:\ 0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{2n^2}, \ [R:\ 1/e^2] \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}, \ [R:\ 1] \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n+1}}, \ [R:\ +\infty]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{11} - (n-1)^{11}}{n^{10}}, \ [R:\ 22] \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}, \ [R:\ +\infty] \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{n!}} \quad (a > 0),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n^{2n}}{(n!)^3}, \ [R:\ 0] \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \ [R:\ 3] \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}, \ [R:\ 4].$$

Esercizio 4. Sia $a_0 := 1$ e $a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(a) Verificare per induzione che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

(b) Verificare per induzione che $1 \leq a_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Dimostrare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e determinare $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Esercizio 5. Verificare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \ [rapporto] \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \binom{2k}{k}^{-1}, \ [rapporto] \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}, \ [confr.asint.]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k, \ [radice] \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^3+2k+2}{3k^3-3k-3}\right)^k, \ [confr.asint.] \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{1+k^2}, \ [Leibniz]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k - 3^k}{5^k - 5k}, \ [confr.asint.] \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right), \ [Leibniz] \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k - k^e}, \ [confr.asint.]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!+2}{(k+2)!}, \ [confr.asint.] \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ [rapporto] \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2+2}, \ [radice]$$