Analisi Matematica I (A.A. 2010/2011)

Docente: Fabio Camilli

Esercizi su Limiti e Continuità

Esercizio 1. Calcolare (senza usare l'Hospital oppure Taylor), al variare dei parametri $r, s \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5^{\tan(x)} - 5^{\sqrt{x}}}{\tan(x) - \sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\tan x}{1-\frac{1}{\tan x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{x}},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\big(\ln(1-x)\big)}{1-2^x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^r \ln\big(\cos(1/x)\big), \qquad \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/\ln x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\ln(2x+4) - \ln(6x+5)\big), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}{\tan x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\frac{x}{x+1}}}{x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} x^x, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{10+\mathrm{e}^{-x}}{\ln x}}, \qquad \lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin(x)}{1-\cos(x)}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1-\cos(x)}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/3x)}{3^{1/x} - 1},$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x)^2 \cdot \sin\left(\mathrm{e}^{(-x^2)}\right), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{\mathrm{e}^{1/x} - s}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(\arctan(x)\big)^{-x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(\pi^x - \mathrm{e}^x)}{\cos(x) - 1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - \sin^2(x-1) - 4x + 2}{(x-1)^2}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x^2-1) - 1}{(x-1)^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\ln\left(\tfrac{x^2+1}{x^2}\right)\right). \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\cos(1/x)} \cdot \ln(x\cos x + \mathrm{e}^{2x}), \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right).$$

Esercizio 2. Studiare, al variare dei parametri a, la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) := \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ a & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} a - x + x^2 & \text{se } x > 0, \\ 1 + \sin(x) & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

$$h(x) := \begin{cases} |x^2 - 2| & \text{se } x > 1, \\ \frac{-2x^3+5a}{3} & \text{se } x \leq 1, \end{cases} \qquad j(x) := \begin{cases} (a-x)^2 & \text{se } x < 2, \\ 2\,\mathrm{e}^x & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

$$k(x) := \begin{cases} x^2 + a & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ \cos(x) & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad l(x) := \begin{cases} \dfrac{3^{\sin x} - (2+a)^x}{x + x^2} & \text{se } x > 0, \\[2ex] \dfrac{\sin\big(1-\cos(2a\,x)\big) - 2\,x^2}{x\cdot\ln(1 - x\cdot\mathrm{e}^x)} & \text{se } x < 0, \\[2ex] 1 - a & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3. Dimostrare che le equazioni seguenti ammettono almeno una soluzione reale positiva:

$$x^3 - 4x + 2 = 0, \qquad \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin(x)} - 1 = 0,$$

$$x + \sin(x)\cos(x) - 1 = 0, \qquad x + \arctan x = 1.$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 + 4x + 1$.

(a) Mostrare che la funzione f è iniettiva e suriettiva, cioè invertibile.

(b) Calcolare un valore approssimativo dello zero di f con un errore inferiore a 2^{-3}.