D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 6.6.2023: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Enunciare il test di monotonia per le funzioni derivabili.

(ii) Trovare gli insiemi di monotonia dellla funzione $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

(ii) Studiare con il criterio del rapporto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{4^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ La serie converge

Esercizio 1 **[3 punti]**

La successione $a_n = \frac{4^n - e^{n\ln(n)}}{\pi^n - n!}$ é

- [a] infinitesima
- [b] oscillante
- [c] asintotica a $-\frac{1}{n^2}$
- [d] divergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\frac{4^n - e^{n\ln(n)}}{\pi^n - n!} = \frac{4^n - n^n}{\pi^n - n!} \sim \frac{n^n}{n!} \longrightarrow +\infty \text{ per } n \to +\infty$$

Esercizio 2 **[3 punti]**

La funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$

- [a] soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle in $[-1, 1]$
- [b] é invertibile
- [c] é pari
- [d] ammette minimo assoluto

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di minimo assoluto

Esercizio 3 **[3 punti]**

Se $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^3 = +\infty$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- [a] converge
- [b] diverge a $+\infty$
- [c] é oscillante
- [d] diverge a $-\infty$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{n\to+\infty}(a_n)^3 = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq 1 \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx.$$

Risoluzione

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt = \ln(t-1)-\ln(t)+c =$$

sostituzione: $\left[t = 1+e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx = (t-1)\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t-1}\right]$

$$= \ln(e^x) - \ln(1+e^x) = x - \ln(1+e^x) + c$$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx = \Big[x - \ln(1+e^x)\Big]_0^1 = 1 - \ln(1+e) + \ln(2)$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+x}-e^x}{1-\cos(x)}$

Risoluzione

$$1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{x^2+x} = 1 + (x^2+x) + \frac{1}{2}(x^2+x)^2 + o(x^2) = 1 + x + \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$e^{x^2+x} - e^x = x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x}-e^x}{(1-\cos(x))} = 2$$

Esercizio 6 **[5 punti]**

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t) + \ y^2(t)e^{-t} = 0 \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Risoluzione

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t)e^{-t} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Eq. a variabili separabili con

$g(y) = y^2$, $h(t) = -e^{-t}$ $\Longrightarrow \exists!$ sol. $y \in C^1(1-\delta, 1+\delta)$ per δ sufficientemente piccolo

1) Sol. stazionarie:

$g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 = 0 \iff \alpha = 0$

Quindi, per $\alpha = 0$, $y(t) = 0$ unica sol. del problema

2) Per $\alpha \neq 0$

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2}\,dr = \int_1^t -e^{-r}\,dr \iff \left[-\frac{1}{r}\right]_\alpha^{y(t)} = \left[e^{-r}\right]_1^t$$

$$\iff -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{\alpha} = e^{-t} - e^{-1} \iff$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-1} + \frac{1}{\alpha} - e^{-t}}$$