Appello del 10.1.2023: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+2+1 punti]

(i) Dare la definizione di maggiorante di $A \subset \mathbb{R}$;

(ii) dare la definizione di estremo superiore di $A \subset \mathbb{R}$;

(iii) Trovare l'estremo superiore di $A = \{1 - e^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Risposta

(i)

(ii) $\sup A = 1$, infatti $\{1-e^{-n}\}_n$ è una succ. crescente e $\lim_{n\to\infty} 1 - e^{-n} = 1$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.

(ii) Fare un esempio di serie convergente, ma non assolutamente convergente

Risoluzione

(i)

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ è convergente, ma

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Esercizio 1 [3 punti]

La funzione $(\ln(1+x^4))^2$ é, per $x \to 0^+$, asintotica a

[a] x^2 [b] x^4
[X] x^8 [d] x^6

Risoluzione (giustificare la risposta)

$(\ln(1+x^4))^2 = (x^4 + o(x^4))^2 = x^8 + o(x^8) \sim x^8$

Esercizio 2 [3 punti]

Il numero complesso $(i-7)/(i+7)$

[X] ha parte reale strettamente negativa [b] ha parte reale strettamente positiva
[c] é puramente immaginario [d] é reale

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\frac{i-7}{i+7} = \frac{-7+i}{7+i} \cdot \frac{7-i}{7-i} = \frac{-49+7i+7i+1}{7^2+1^2} = -\frac{48}{50} + \frac{14}{50}i$

$\mathrm{Re}\left(\frac{i-7}{i+7}\right) = -\frac{48}{50}$

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e strettamente crescente tale che $f(0) = 1$, $f(1) = e$. Allora

[a] $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ [b] f é continua in $\frac{1}{2}$
[X] f é integrabile in $[0, 1]$ [d] f é integrabile in $[1, +\infty)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

f crescente e limitata in $[0,1] \Rightarrow f$ integrabile in $[0,1]$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\ln(1+x^2)} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x)} \right)$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{\sin^2(x) - x^2}{x \sin(x)} = \lim_{x\to 0} e^x \frac{-\frac{1}{3} \cdot x^4}{x^4} = -\frac{1}{3}$$

$$x \cdot \sin(x) \sim x^2$$

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^2 = x^2 - 2\frac{x^4}{3!} + o(x^4)$$

$$\sin^2(x) - x^2 = -\frac{1}{3} x^4 + o(x^4) \sim -\frac{1}{3} x^4$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})dt$$

Risoluzione

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})\,dt = \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin(x)\,dx = (*)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \Longleftrightarrow t = x^2, \\ t = 0 \to x = 0 \\ t = \pi^2 \to x = \pi \end{cases}$$

$$(*) = \Big[-2x\cos(x) \Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos(x)\,dx =$$

$$= \Big[-2x\cos(x) + 2\sin(x) \Big]_0^{\pi} = 2\pi$$

Esercizio 6 [4 punti]

Tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

(verificare se ammette asintoti obliqui in $\pm\infty$).

Risoluzione

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

segno: $f \geq 0 \iff 2 - x > 0 \iff x < 2$

zeri: $f(x) = 0 \iff x = 0$

limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

Asintoto obliquo

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$; $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2-x} + x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} = -2$

$\Rightarrow$ $y = -x - 2$ è asintoto obliquo in $+\infty$

- Derivata:

$f'(x) = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$, $x = 4$

$f'(x) \geq 0 \iff x \in [0,2) \cup (2,4]$

$f'(x) \leq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$