A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 1.2.2017: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ nel punto $x_0 = 1$.

Risposta

(i)

(ii) $f(1) = 3$, $f'(1) = -4$, quindi

$y = 3 - 4(x-1) \iff y = 4 - 4x$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il teorema del valor medio di Lagrange.

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f(x) = x^2 - x + 1$ in $[2, 4]$.

Risoluzione

(i)

(ii) $f'(x) = 2x - 1$, quindi $f'(c) = 2c - 1$

$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = f'(c) \iff \frac{13 - 3}{2} = 2c - 1 \iff$

$6 = 2c \iff \boxed{c = 3}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie divergente a termini strettamente positivi. Allora

[a] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge;

[b] $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$

[c] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ non converge;

[X] $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{k=0}^{m} a_k > 1$

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) no, per $a_n = \frac{1}{n}$, infatti $\sum_n 1/a_n = \sum_n n = +\infty$

b) no, per $a_n = \frac{1}{n}$, infatti $\lim_n a_n = \lim_n 1/n = 0$

c) no, per $a_n = \frac{1}{n}$, infatti $\sum_n (-1)^n a_n = \sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ converge

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ una funzione pari. Allora

[a] f é derivabile in 0 e $f'(0) = 0$

[X] $\lim_{x\to-\sqrt{2}} f(x) = f(\sqrt{2})$

[c] f ammette limite (finito o infinito) per $x \to +\infty$

[d] f ha un punto di estremo assoluto in $x = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché f continua $\lim_{x\to-\sqrt{2}} f(x) = f(-\sqrt{2})$ e poiché f pari $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0). Indicare quale tra le seguenti affermazioni é *falsa.*

[a] f é continua in (x_0, y_0)

[b] f é derivabile in (x_0, y_0)

[c] esiste il piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0)

[X] $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti f differenziabile, non implica esistenza derivate seconde, mentre implica le altre proprietà

A

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$10y''(t) - 3y'(t) - y(t) = 9$$

Risoluzione

1) Eq. omogenea: $10y'' - 3y' - y = 0$,

$10\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \iff \lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$, quindi

$$y_0(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 = e^{-\frac{1}{5}t}$$

2) Sol. particolare con metodo di somiglianza: $f(t) = 9$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = A \Rightarrow \bar{y}'(t) = 0$, $\bar{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione:

$$-A = 9 \iff A = -9$$

quindi $\bar{y}(t) = -9$

3) Integrale generale

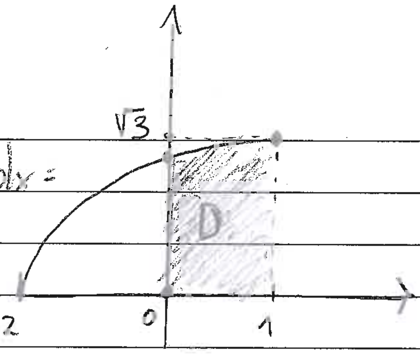
$$y(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{5}t} - 9, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ 0 \leq y \leq \sqrt{x+2}\}$ e calcolare

$$\iint_D \sqrt{y} + xy\, dxdy$$



Risoluzione

$$\iint_D (\sqrt{y} + xy)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x+2}} \sqrt{y} + xy\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} y^{3/2} + \frac{xy^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x+2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}(x+2)^{3/4} + \frac{x(x+2)}{2} \right) dx = \left[\frac{8}{21}(x+2)^{7/4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{21}(3)^{7/4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

Esercizio 6

[5 punti]

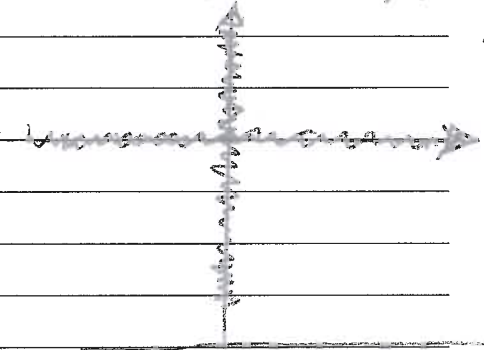
Trovare il dominio D e i punti di massimo e minimo relativo interni a D della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{y^2}$$

Risoluzione

f è definita in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$, cioè $\mathbb{R}^2$ meno gli assi.

In questo dominio è regolare



$$Df(x,y) = \left(2x - \frac{1}{x^3},\ 2y - \frac{4}{y^3}\right) = (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{x^3} = 0 & \Longleftrightarrow\ x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ 2y - \frac{4}{y^3} = 0 & \Longleftrightarrow\ y = \pm\sqrt[4]{2} \end{cases}$$

Punti critici

$P_1 = \left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[4]{2}\right)$

$P_2 = \left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt[4]{2}\right)$

$P_3 = \left(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[4]{2}\right)$

$P_4 = \left(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt[4]{2}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{3}{x^4} & 0 \\ 0 & 2 + \frac{12}{y^4} \end{bmatrix}$$

$$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Punto di minimo locale}$$

$$Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Punto di minimo locale}$$

$$Hf(P_3) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Punto di minimo locale}$$

$$Hf(P_4) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Punto di minimo locale}$$