D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 22.01.2024: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

(ii) Descrivere il comportamento della successione $\{\frac{1}{n^\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

(ii) Utilizzando il teorema al punto (i), calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{-t^4}-1)dt}{\cancel{\ }x^5}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

HOPITAL + TEOR. FONDAMENTALE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{-t^4}-1)\,dt}{x^5} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^4}-1}{5x^4} = -\frac{1}{5}$$

A

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \in \mathbb{R}$ e sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] $\inf A = 3$;
- [$\cancel{\text{b}}$] A é limitato;
- [c] $\max A = 3$;
- [d] $\{e^{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ non é convergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti se una successione è convergente, allora è limitata, cioè $\exists\, m, M$ t.c.
$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Quindi m, M sono un minorante e un maggiorante di A

Esercizio 2

[3 punti]

Risoluzione (giustificare la risposta)

Il modulo del numero complesso $7 - 4\sqrt{2}i$ é

- [a] 1 ;
- [$\cancel{\text{b}}$] 9;
- [c] $28\sqrt{2}$;
- [d] 81.

$|7 - 4\sqrt{2}\,i| = \sqrt{(7)^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{49 + 32} = 9$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione f(x)=$\sqrt[3]{x}(1-e^x)$ é

- [a] dispari;
- [b] limitata;
- [$\cancel{\text{c}}$] derivabile in $\mathbb{R}$;
- [d] non derivabile in 0.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\,(1-e^h)}{h} = 0$$

$$\left(\text{perché } \lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = -1\right)$$

A

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1-x^2)}$$

Risoluzione

$\ln(1-x^2) \sim x^2 \implies x\ln(1-x^2) \sim -x^3$

$x\cos(x) - \sin(x) = x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - \left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right) =$

$= x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{3}x^3$

$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{-x^3} = \frac{1}{3}$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2ty(t)}{t^2-1} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Risoluzione

Equazione lineare omogenea: $a(t) = \frac{2t}{t^2-1}$, $b(t) = 0$

poiché $a(t)$ è continua in $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$ e $t_0 = 0$

la sol. è definita in $(-1,1)$

$y(t) = e^{A(t)} y_0$ ove $A(t) = \int_0^t \frac{2s}{s^2-1}\,ds =$

$= \left[\ln|s^2-1|\right]_0^t = \ln|t^2-1|$

Quindi

$y(t) = e^{\ln|t^2-1|} \cdot y_0 = y_0 \cdot |t^2-1| =$

$= y_0 \cdot (1-t^2)$ per $t \in (-1,1)$

$t \in (-1,1)$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (non ci sono simmetrie)

- $f(x) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}$

- $\begin{cases} f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty) \\ f(x) < 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (1, 2) \end{cases}$

		-1		0		1		2	
$x^2 - x - 2 > 0$	++		-		--		--		+++
$x(x-1) > 0$	+++		++		--		++		++++

- $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

- $f'(x) = 2 \dfrac{(2x - 1)}{(x^2 - x)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

- $\begin{cases} f'(x) > 0 \iff x > 1/2 \\ f'(x) < 0 \iff x < 1/2 \end{cases}$