A

Appello del 8.1.2016: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: Cognome: Matricola:

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di successione monotona crescente

(ii) Fare un esempio di successione monotona crescente limitata ed un esempio di una successione crescente non limitata

Risposta

(i) $\{a_n\}_n$ monotona crescente se

$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) crescente limitata: $a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

crescente non limitata: $a_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale rispetto alla variabile x per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare la derivata parziale rispetto x della funzione $f(x, y) = e^{x^2y+2y}$

Risoluzione

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2y+2y} \cdot (2xy)$

Esercizio 1 [3 punti]

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre esiste $\beta > 0$ tale che $\lim_{n\to\infty} n^\beta a_n = 0$. Allora

[a] $a_n \sim 1/n$;

[X] se $\beta > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ;

[c] a_n é monotona;

[d] $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal criterio del confronto asintotico: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^\beta}} = 0$

e $\sum_n \frac{1}{n^\beta} < +\infty$ per $\beta > 1$ $\Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

Esercizio 2 [3 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) < -M$ $\forall x > \delta$. Allora

[a] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

[b] $\lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$;

[X] $\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$;

[d] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dalle ipotesi, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, quindi

$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $f(x) = x + \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, e sia g la sua funzione inversa. Allora l'insieme ove g é derivabile

[a] coincide con $\mathbb{R}$;

[b] é limitato;

[c] é costituito da un numero finito di punti

[X] é un sottoinsieme non limitato di $\mathbb{R}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = 1 + \cos(x)$, quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

quindi f^{-1} non è derivabile nei punti $y = f(x)$ con $x = \pi + 2k\pi$

cioè nei punti $y = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t)^2 - 1)e^t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione

Eq. a variabili separabili con $g(y) = (y^2-1)$, $f(t) = e^t$
Soddisfa le ipotesi di esistenza ed unicità locale.

Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 1 = 0 \iff \alpha = \pm 1$
quindi sol. stazionarie per $\alpha = \pm 1$
Per $\alpha \neq \pm 1$

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2-1}\,dr = \int_0^t e^r\,dr \iff \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y(t)-1}{y(t)+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right| + e^t - 1$$

$$\iff \left|\frac{y(t)-1}{y(t)+1}\right| = \left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right| \cdot e^{2(e^t-1)}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)(1+\sin(2x)) - x}{x^2 + 2x^5}$$

Risoluzione

$x^2 + 2x^5 \sim x^2$ per $x \to 0$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $\sin(2x) = 2x + o(x^2)$

$\ln(1+x)(1+\sin(2x)) = (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 + 2x + o(x^2)) = x + 2x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)(1+\sin(2x)) - x}{x^2+2x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = 4xy - x^3 + 4y^2 + 1$ e classificarli.

Risoluzione

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

Punti critici: $Df(x,y) = (4y - 3x^2, 4x + 8y) = 0 \iff$

$$\begin{cases} 4x + 8y = 0 \iff x = -2y \\ 4y - 3x^2 = 0 \iff 4y - 12y^2 = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$P_1 = (0,0)$

$P_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$\det Hf(0,0) = -16 < 0$

(punto di sella)

$$Hf\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{12}{3} & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$\det Hf\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 16 > 0$

$f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{12}{3} > 0$

(punto di minimo)