D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 9.1.2017: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di successione limitata, ma non convergente.

Risposta

(i)

(ii) $a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non differenziabile

Risoluzione

(i)

(ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

continua in $\mathbb{R}^2$, ma non derivabile e quindi non differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente a termini positivi. Allora

- [a] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$;
- [b] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monotona
- [c] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ non converge;
- [X] $\{\sin(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) = 0$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = x^5\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

- [a] non é derivabile in π
- [b] é monotona non decrescente
- [X] ha integrale nullo in $[-75, 75]$
- [d] ha limite $-\infty$ per $x \to -\infty$

Risoluzione (giustificare la risposta)

La funzione $f(x)$ è dispari, quindi $\int_{-75}^{75} f(x)\,dx = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia f una funzione regolare tale che formula $\int_0^1 (xf'(x) + f(x))dx = 0$ é

- [X] vera se $f(1) = 0$
- [b] sempre falsa
- [c] vera se $f(0) = 0$
- [d] vera se f é convessa

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\int_0^1 x f'(x)\,dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$ (per parti), allora $\int_0^1 (x f'(x) + f(x))\,dx = [x f(x)]_0^1$ e quindi l'identità vera se $f(1) = 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x(e^{x^2}-1))}{x^3+x^4}$$

Risoluzione

$x^3 + x^4 \sim x^3$

$x(e^{x^2}-1) = x(x^2 + o(x^2)) = x^3 + o(x^3)$

$\sin(x(e^{x^2}-1)) = (x^3 + o(x^3)) + o(x^3 + o(x^3)) = x^3 + o(x^3)$
$\sim x^3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x(e^{x^2}-1))}{x^3+x^4} = 1$$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t+1)y'(t) - e^{y(t)} = 0 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Il problema è equivalente a $\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t+1} e^{y(t)} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$

quindi eq. a variabili separabili con $g(y) = e^y$, $h(t) = \frac{1}{t+1}$
($g \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in C^0((-1,+\infty))$ $\exists!$ sol. pb. di Cauchy)

- sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha = 0$, impossibile
- $\int_\alpha^{y(t)} \frac{dr}{e^r} = \int_1^t \frac{1}{r+1}\,dr \iff \left[-e^{-r}\right]_\alpha^{y(t)} = \left[\ln|r+1|\right]_1^t$

$\iff e^{-y(t)} = e^{-\alpha} - \ln\left(\frac{t+1}{2}\right) \iff$ il modulo si può togliere poiché $t \in (-1,+\infty)$

$y(t) = \ln\left(\frac{1}{e^{-\alpha} - \ln\left(\frac{t+1}{2}\right)}\right)$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = (x^2 - 4)e^{-|x|}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

- Dominio: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$
- Radici: $f(x) = 0 \iff x = \pm 2$
- Segno: $f(x) > 0 \iff x^2 - 4 > 0 \iff x < -2$ e $x > 2$
- Simmetrie: la funzione è pari
- Limiti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Derivata prima

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(2x - x^2 + 4) & x > 0 \\ e^{x}(x^2 + 2x - 4) & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 4, \quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -4$ (f non è derivab. in 0)

Se $x > 0$, $f'(x) = 0 \iff x = 1 + \sqrt{5}$, inoltre
$f'(x) > 0$ se $0 < x < 1 + \sqrt{5}$, $f'(x) < 0$ se $x > 1 + \sqrt{5}$

Se $x < 0$, $f'(x) = 0 \iff x = -1 - \sqrt{5}$, inoltre
$f'(x) > 0$ se $x < -1 - \sqrt{5}$, $f'(x) > 0$ se $-1 - \sqrt{5} < x < 0$