Appello del 9.2.2016: Compito A

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di estremo superiore per un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Se $A \neq \emptyset$ e $\inf A = \sup A$, allora si può dire che A ammette massimo e massimo?

Risposta

(i)

(ii) Si perchè se $\inf A = \sup A$, allora $A = \{a\}$ e $\inf A = \sup A = \max A = \min A = \{a\}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Fermat per una funzione di più variabili reali

(ii) Mostrare con un contro-esempio che il teorema precedente é solo CN, ma non CS per gli estremi locali

Risoluzione

(i)

(ii) $f(x,y) = x^2 - y^2$ allora $Df(0,0) = (0,0)$ ma $(0,0)$ non è un estremo locale

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $|a_{2n}| > \pi$ e $a_{2n+1} \leq -4n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora

- [a] non diverge;
- [b] non é limitata superiormente ;
- [c] é limitata;
- [~~d~~] non converge

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $a_{2n} > \pi$, oppure $a_{2n} < -\pi$ e $a_{2n+1} < -n$, allora $\lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = -\infty$ e quindi non può convergere

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tale che $f^{(k)}(1) = 0$ per $k = 0, 1, 2, 3$ e $f^{(4)}(1) = 1$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che in $(1 - \delta, 1 + \delta)$ f é

- [a] strettamente crescente ;
- [~~b~~] non negativa;
- [c] strettamente decrescente;
- [d] non positiva.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema sulle CS per gli estremi locali, $x_0 = 1$ è un punto di minimo locale, quindi $\exists \delta$ t.c. $f(x) \geq f(1) = 1$ $\forall x \in (1-\delta, 1+\delta)$

Esercizio 3

[3 punti]

L'equazione algebrica $z^4 - z = 0$ in $\mathbb{C}$ ha esattamente

- [a] infinite soluzioni, di cui 2 reali;
- [b] le soluzioni 0 e 1 con molteplicità 1 e 3 rispettivamente;
- [c] tre soluzioni distinte
- [d] quattro soluzioni distinte

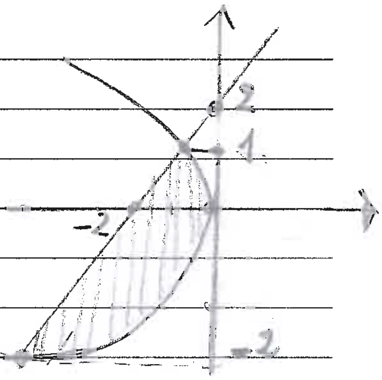
Risoluzione (giustificare la risposta)

L'equazione $z^4 - z = 0 \iff z(z^3 - 1)$ ha come soluzioni $z = 0$ e le 3 soluzioni distinte di $z^3 - 1 = 0$

Esercizio 4 [4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2 \le x \le -y^2\}$ e calcolare $\iint_D e^y dxdy$.

Risoluzione



$$\iint_D e^y dxdy = \int_{-2}^{1} \int_{y-2}^{-y^2} e^y dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left[x e^y \right]_{y-2}^{-y^2} = \int_{-2}^{1} e^y(-y^2 - y + 2) dy =$$

$$= \left[e^y(-y^2 + y + 1) \right]_{-2}^{1} = \frac{5}{e^2} + e$$

Esercizio 5 [4 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Risoluzione

$\ln\left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right) \sim \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$, $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

quindi $\ln\left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$

Per il criterio del confronto asintotico, poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < +\infty$

Esercizio 6 [5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo

Risoluzione

Funzione

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$

$f(x) = 0 \iff x^2 + x = 0 \iff x = 0, \; x = -1$

$f(x) > 0 \iff x^2 + x > 0 \iff x < -1 , \; x > 0$

$f(x) < 0 \iff x^2 + x < 0 \iff x \in (-1, 0)$

Derivata

$$Df(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)} \cdot \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$Df(x) = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{cases} Df(x) > 0 \iff x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \\ Df(x) < 0 \iff x < 1-\sqrt{2} , \; x > 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

$x_0 = 1 - \sqrt{2}$ (punto di min. locale) $\qquad x_1 = 1 + \sqrt{2}$ (punto di max. locale)