B

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 20.02.2024: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

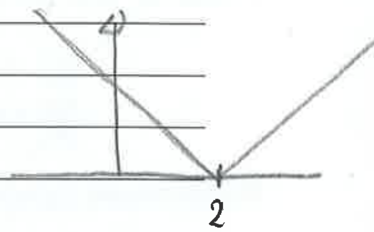
(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in un punto x_0.

ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non derivabile nel punto $x_0 = 2$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = |x-2|$ non è derivabile in $x_0 = 2$



Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema degli Zeri

(ii) Mostrare che la funzione $f(x) = -3x^3 - 4x + 1$ ha uno zero in $[0, 1]$

Risoluzione

(i)

(ii) f è continua in $[0,1]$, inoltre $f(0) = 1$, $f(1) = -6$
quindi $f(0) \cdot f(1) < 0$

Esercizio 1 [3 punti]

La successione $a_n = e^n - n! - \ln(n^{500}) + (-1)^n$ é

- [a] indeterminata;
- [b] convergente;
- [c] divergente a $+\infty$;
- [X] divergente a $-\infty$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{n\to\infty} n!\left(\underbrace{\frac{e^n}{n!}}_{0} - 1 - \underbrace{\frac{\ln(n^{500})}{n!}}_{0} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{0}\right) = -\infty$$

Esercizio 2 [3 punti]

L'integrale in senso improprio $\int_1^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) dt$

- [a] é finito e non positivo;
- [b] non esiste;
- [X] é finito e non negativo ;
- [d] nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to \infty$ e $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) > 0$ per $t > 1$,

quindi $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ è finito e non negativo

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^4 - 16i = 0$. Allora $|z|$ vale

- [a] 4
- [X] 2
- [c] 8
- [d] $16i$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$z^4 = 16i \implies |z^4| = 16 \iff |z| = \sqrt[4]{16} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$

B

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\, dx$$

Risoluzione

$$\int_{-1}^{1} |xe^x| dx = \int_{-1}^{0} (-xe^x) dx + \int_{0}^{1} xe^x dx =$$

$$= -\left[xe^x - e^x\right]_{-1}^{0} + \left[xe^x - e^x\right]_{0}^{1}$$

$$|xe^x| = \begin{cases} -xe^x & x<0 \\ xe^x & x\geq 0 \end{cases}$$

OSS !

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{y(t)^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili con $h(t) = \sqrt[3]{t}$, $g(y) = \frac{1}{y^4}$

- Sol. stazionarie: $g(1) = 1$, quindi a $y(0)=1$ non corrisponde una sol. stazionaria
- Separazione variabili: $\int_1^{y(t)} r^4 dr = \int_0^t \sqrt[3]{r}\, dr \iff$

$$\frac{y^5(t)}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{4} t^{4/3} \iff y^5(t) = \frac{15}{4} t^{\frac{4}{3}} + 1 \iff$$

$$y(t) = \sqrt[5]{\frac{15}{4} t^{4/3} + 1}$$

Esercizio 6 [4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{e^{x}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ non ci sono simmetrie

- $f(x) = 0 \iff x = \pm 2$
  $f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
  $f(x) < 0 \iff x \in (-2, 2)$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- $f(0) = -4$

- $f'(x) = \frac{2x\cancel{e^x} - (x^2-4)\cancel{e^x}}{e^{\cancel{2}x}} = \frac{-x^2+2x+4}{e^x}$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 4 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{5}$

$f'(x) > 0$ se $x \in (-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5})$
$f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1-\sqrt{5}) \cup (-1+\sqrt{5}, +\infty)$