D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 22.01.2024: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

(ii) Descrivere il comportamento della successione $\{(q)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & |q|<1 \\ \nexists & q\le -1 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

(ii) Utilizzando il teorema al punto (i), calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^4)dt}{x^5}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

HOPITAL + TEO. FONDAMENTALE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^4)dt}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{5x^4} = \frac{1}{5}$$

B

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \in \mathbb{R}$ e sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] $\inf A = 3$;
- [b] A é limitato;
- [c] $\max A = 3$;
- [d] $\{\cos(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non é convergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti una successione convergente è anche limitata, cioè $\exists m, M$ t.c. $m \le a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Quindi m, M sono minorante e un maggiorante di A

Esercizio 2

[3 punti]

Risoluzione (giustificare la risposta)

Il modulo del numero complesso $-7 + 4\sqrt{2}i$ é

- [a] 9 ;
- [b] 1;
- [c] 81;
- [d] $28\sqrt{2}$.

$$|-7+4\sqrt{2}i| = \sqrt{(-7)^2+(4\sqrt{2})^2} = \sqrt{49+32} = 9$$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione f(x)=$\sqrt[5]{x}\sin(x)$ é

- [a] dispari;
- [b] limitata;
- [c] derivabile in $\mathbb{R}$;
- [d] non derivabile in 0.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h}\,\sin(h)}{h} = 0$$

$$\left(\text{poiché } \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1\right)$$

B

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - e^x + 1 + \frac{x^2}{2}}{x(1-\cos(x))}$$

Risoluzione

$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \Rightarrow x(1-\cos(x)) = \frac{x^3}{2!} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{2}$

$x\cos(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)$; $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$x\cos(x) - e^x + 1 + \frac{x^2}{2} = \cancel{x} - \frac{x^3}{2!} \cancel{-1} \cancel{-x} \cancel{-\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} \cancel{+1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)$

$= -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{2}{3}x^3$

$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - e^x + 1 + \frac{x^2}{2}}{x(1-\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3}{\frac{x^3}{2}} = -\frac{4}{3}$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2ty(t)}{t^2+1} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Risoluzione

EDO lineare omogenea : $a(t) = \frac{2t}{t^2+1}$, $b(t) = 0$

Poiché $a(t)$ è continua in $\mathbb{R}$, $\exists!$ sol. in $\mathbb{R}$

$y(t) = y_0 e^{A(t)}$ ove $A(t) = \int_0^t \frac{2s}{s^2+1}\,ds =$

$= \left[\ln|s^2+1|\right]_0^t = \ln(t^2+1)$

$y(t) = y_0 e^{\ln(t^2+1)} = y_0 \cdot (t^2+1)$

E

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x^2+x}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ (non ci sono simmetrie)
- $f(x) = 0 \iff x^2+x+2 = 0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (non ha radici reali)
- $\begin{cases} f(x) > 0 \iff x^2+x>0 \iff x<-1 \text{ e } x>0 \\ f(x)<0 \iff x \in (-1,0) \end{cases}$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to +0} f(x) = +\infty \end{cases}$
- $f'(x) = -\dfrac{4x+2}{(x^2+x)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} f'(x) > 0 \iff x < -\frac{1}{2} \\ f'(x) < 0 \iff x > \frac{1}{2} \end{cases}$