Appello del 8.1.2016: **Compito B**

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di successione monotona decrescente

(ii) Fare un esempio di successione decrescente non limitata ed un esempio di una successione decrescente limitata

Risposta

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotona decrescente se

$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) decrescente limitata: $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

decrescente non limitata: $a_n = -n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale rispetto alla variabile y per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare la derivata parziale rispetto y della funzione $f(x, y) = e^{x^2y+2y}$

Risoluzione

(i) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2y+2y} \cdot (x^2+2)$

Esercizio 1 [3 punti]

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre esiste $r > 1$ tale che $\lim_{n\to\infty} r^n a_n = 0$. Allora

$\boxed{\text{a}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ non esiste;

$\boxed{\text{b}}$ a_n é monotona;

$\boxtimes$ $\boxed{\text{c}}$ se $r > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

$\boxed{\text{d}}$ $a_n \sim 1/n$;

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal criterio del confronto asintotico: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\left(\frac{1}{r}\right)^n} = 0$

e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{r}\right)^n < +\infty$

Esercizio 2 [3 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) < -M$ $\forall x < -\delta$. Allora

$\boxtimes$ $\boxed{\text{a}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$;

$\boxed{\text{b}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

$\boxed{\text{c}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$;

$\boxed{\text{d}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dalle ipotesi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, quindi

$\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $f(x) = x - \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, e sia g la sua funzione inversa. Allora l'insieme ove g é derivabile

$\boxed{\text{a}}$ é costituito da un numero finito di punti;

$\boxed{\text{b}}$ é limitato;

$\boxtimes$ $\boxed{\text{c}}$ é un sottoinsieme non limitato di $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{d}}$ coincide con $\mathbb{R}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = 1 + \sin(x)$, quindi $f'(x) = 0 \iff x = 3\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Allora f^{-1} non è derivabile nei punti $y = f(x)$ con $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$,

cioè nei punti $y = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (e^{y(t)} - 1)t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione

Eq. a variabili separabili con $g(y) = e^{y(t)} - 1$, $f(t) = t$
Soddisfa le ipotesi di esistenza ed unicità locale.

Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff e^{\alpha} - 1 = 0 \iff \alpha = 0$, quindi sol. stazionaria per $\alpha = 0$

Per $\alpha \neq 0$

$$\int_{\alpha}^{y(t)} \frac{1}{e^{r} - 1} \, dr = \int_0^t r \, dr \iff \ln\left|1 - \frac{1}{e^{y(t)}}\right| = \ln\left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| + \frac{t^2}{2}$$

$$\iff \left|1 - \frac{1}{e^{y(t)}}\right| = \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| e^{\frac{t^2}{2}}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x)(1 + \sin(2x)) - 2x}{x^2 + 2x^6}$$

Risoluzione

$x^2 + 2x^6 \sim x^2$

$\ln(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$; $\sin(2x) = 2x + o(x^2)$

$$\ln(1+2x)(1+\sin(2x)) = (2x - 2x^2 + o(x^2))(1 + 2x + o(x^2)) =$$

$$= 2x + 4x^2 - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)(1+\sin(2x)) - 2x}{x^2 + 2x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Esercizio 6

[5 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = 4xy - y^3 + 4x^2 + 1$ e classificarli.

Risoluzione

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

Punti critici: $Df(x,y) = \left(4y + 8x,\ 4x - 3y^2\right) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 8x = 0 & \Leftrightarrow y = -2x \\ 4x - 3y^2 = 0 & \Leftrightarrow 4x - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$P_1 = (0,0)$; $P_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -6y \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & +4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det Hf(0,0) = -16$

(punto di sella)

$$Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & \frac{12}{3} \end{bmatrix}$$

$\det Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 16$

$f_{xx}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 8$

quindi punto di minimo locale