Appello del 7.9.2021: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = 2x^2 + 3x$ nel punto $x_0 = 2$.

Risposta

(i)

(ii)

$y = f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$ per $x_0 = 2$

$y = 14 + 11(x-2)$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema sulla di Taylor con il resto di Lagrange.

(ii) Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione $f(x) = e^{\cos(x)-1}$ in $x_0 = 0$.

Risposta

(ii)

(ii) $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$

$e^{\cos(x)-1} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + \dots$

$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Allora

- [a] f é identicamente nulla in $[0, 1]$
- [b] (X) f ammette almeno uno zero in $[0, 1]$
- [c] f é derivabile ed esiste $c \in [0, 1]$ tale che $f'(c) = 0$
- [d] Se F é una primitiva di f, allora $F'(1) = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teor. della media, $\exists c \in [0,1]$ t.c. $0 = \int_0^1 f(x)dx = f(c)(1-0)$

$\Leftrightarrow \exists c \in [0,1]$ t.c. $f(c) = 0$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$, dispari e tale che $f(1) = -5$. Allora

- [a] $f(x) = -5x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- [b] l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno 3 soluzioni
- [c] l'equazione $f(x) + 5x = 0$ ha almeno 3 soluzioni
- [d] $\exists \delta > 0$ t.c. f é decrescente in $(1 - \delta, 1 + \delta)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché f è dispari, $f(-1) = 5$. Quindi $g(x) = f(x) + 5x$ è t.c.

$g(1) = f(1) + 5 = 0$, $g(-1) = f(-1) - 5 = 0$ e $g(0) = f(0) = 0$

poiché f è dispari e continua

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $|a_n| \geq |a_{n+1}|$. Allora

- [a] $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- [b] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente
- [c] (X) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata
- [d] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Si ha che $|a_{n+1}| \leq |a_n| \leq |a_{n-1}| \leq \dots \leq |a_0| \ \forall n$,

quindi

$$|a_n| \leq |a_0| \quad \forall n$$

cioè $\{a_n\}_n$ è limitata

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-x^3}-1)(1-\cos(2x))}{\ln(1+x^5)}$$

Risoluzione

$$\begin{cases} \ln(1+x^5) \sim x^5 \\ e^{-x^3}-1 \sim -x^3 \\ \cos(t)-1 \sim -\frac{t^2}{2} \Longrightarrow 1-\cos(2x) \sim \frac{4x^2}{2} = 2x^2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-x^3}-1)(1-\cos(2x))}{\ln(1+x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{(-x^3)\cdot 2x^2}{x^5} = -2$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})dx$$

Risoluzione

$$\int \sin(\sqrt{x})\,dt = \int 2t\sin(t)\,dt = -2t\cos(t) + \int 2\cos(t)\,dt =$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{cases} \qquad = -2t\cos(t) + 2\sin(t) + C = \\ = -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}) + C$$

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx = \Big[-2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x})\Big]_0^{\pi^2} =$$

$$= 2\pi$$

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x(x-2)e^x$ (con derivata seconda)

Risoluzione

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

- segno e zeri: $f(x) = 0 \iff x = 0$ e $x = 2$

$f(x) > 0 \iff x(x-2) > 0 \iff x < 0$ e $x > 2$

- limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

- Derivata prima

$$f'(x) = (x-2)xe^x + xe^x + (x-2)e^x = e^x(x^2 - 2x + x + x - 2) =$$
$$= e^x(x^2 - 2)$$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \iff x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2} \iff f$ crescente

- Derivata seconda

$$f''(x) = e^x(x^2-2) + e^x \cdot 2x =$$
$$= e^x(x^2 + 2x - 2)$$

$f''(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 2 = 0 \iff$
$x = -1 \pm \sqrt{3}$

f convessa se $x < -1 - \sqrt{3}$ e
$x > -1 + \sqrt{3}$

f concava se $x \in (-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$