Appello di Ing. Informatica del 11.1.2018: Compito B

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: Cognome: Matricola:

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di minorante di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Dare la definizione di estremo inferiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema del Confronto per le successioni numeriche

(ii) Provare attraverso il Teorema dei Confronto che la serie $\{\frac{1}{e^n+\cos(n^3)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ~~diverge~~ converge

Risoluzione

(i)

(ii)

$e^n - 1 \leq e^n + \cos(n^3) \leq e^n + 1$

e quindi $\frac{1}{e^n+1} \leq \frac{1}{e^n+\cos(n^3)} \leq \frac{1}{e^n-1}$

da cui $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n+\cos(n^3)} = 0$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)dx = 0$, allora

- [x] a Esiste $c \in (0,1)$ tale che $f(c) = 0$;
- [ ] b Se $F(x)$ é una primitiva di f, allora $F'(1) = 0$
- [ ] c $f(0) \cdot f(1) < 0$
- [ ] d f é identicamente nulla in $[0,1]$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teo. della media, $\exists c \in (0,1)$ t.c. $\int_0^1 f(x)dx = f(c)$

e quindi $\exists c \in (0,1)$ t.c. $f(c) = 0$

Esercizio 2

[4 punti]

Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi convergente e sia $b_n \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\sum_n b_n$

- [x] a non diverge a $+\infty$
- [ ] b é divergente a $-\infty$
- [ ] c é assolutamente convergente, ma non convergente
- [ ] d $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $b_n \leq a_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k$ quindi per il teo. del confronto sulle successioni se

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) é interno ad A. Se f é differenziabile in (x_0, y_0) allora non necessariamente

- [ ] a f é continua in (x_0, y_0)
- [ ] b f é derivabile in (x_0, y_0)
- [ ] c $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0) \cdot v$ per ogni versore $v \in \mathbb{R}^2$
- [x] d $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti la differenziabilità non implica l'esistenza delle derivate seconde in (x_0, y_0)

Esercizio 4

[4 punti]

Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax - \sin(ax)}{x^3} = \frac{27}{6}.$$

Risoluzione

$\sin(ax) = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3)$ $(a \neq 0)$

$\lim_{x\to 0} \frac{ax - \sin(ax)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^3x^3}{3!}}{x^3} = \frac{a^3}{3!}$

quindi $\frac{a^3}{3!} = \frac{27}{6} \iff a = 3$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+e^{2t})y'(t) - e^t y(t)^2 = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

$\begin{cases} y'(t) = \frac{e^t}{1+e^{2t}} \cdot y(t)^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$ (eq. a variabili separabili $h(t) = \frac{e^t}{1+e^{2t}}$, $g(y) = y^2$)

Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 = 0 \iff \alpha = 0$

$(\alpha \neq 0)$ Separazione variabili: $\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{v^2}\,dv = \int_0^t \frac{e^v}{1+e^{2v}}\,dv \iff$

$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{\alpha} = \arctan(e^t) - \frac{\pi}{4}$

$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \arctan(e^t) + \frac{\pi}{4}}$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = |10 + x|e^{1/x}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Segno di f: $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(x) = 0 \iff x = -10$

Limiti: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Derivata: f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, -10\}$

$$f(x) = \begin{cases} (x+10)\, e^{1/x} & x \geq -10 \\ -(x+10)\, e^{1/x} & x < -10 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{1/x} \dfrac{x^2 - x - 10}{x^2} & x \geq -10 \\ -e^{1/x} \dfrac{x^2 - x - 10}{x^2} & x < -10 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -10^+} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to -10^-} f'(x)$ (Punto angoloso)

$f'(x) > 0 \iff x \in \left(-10, \frac{1-\sqrt{41}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}, +\infty\right)$

$f'(x) < 0 \iff$

$x \in (-\infty, -10) \cup \left(\frac{1-\sqrt{41}}{2}, 0\right) \cup$

$\cup \left(0, \frac{1+\sqrt{41}}{2}\right)$