Appello del 3.6.2024: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}$, non vuoto,

(i) Dare la definizione di maggiorante di D.

(ii) Dare la definizione estremo superiore di D.

(iii) Fare un esempio di insieme limitato superiormente, ma non inferiormente.

Risposta

(i)

(ii)

(iii) $D = (-\infty, 0)$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Fermat per la caratterizzazione dei punti di estremo locale.

(ii) Mostrare con un esempio che il Teorema di Fermat fornisce una CN, ma non una CS per i punti di estremo

Risoluzione

(i)

(ii) $f(x) = x^3$, allora $f'(0) = 0$, ma $x = 0$ non è punto di estremo locale

Esercizio 1 [3 punti]

L'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$

- [a] converge per ogni $\alpha > 0$
- [b] converge per $\alpha = 1$
- [c] ☒ non converge per $\alpha \geq 1$;
- [d] converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ = +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 2 [3 punti]

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$ é

- [a] ☒ convergente
- [b] divergente
- [c] oscillante
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Per il criterio della radice

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$$

Esercizio 3 [4 punti]

Il numero complesso $(5 + i)/(5 - i)$

- [a] é reale;
- [b] é puramente immaginario;
- [c] ha parte reale strettamente negativa;
- [d] ☒ ha parte reale strettamente positiva.

Risoluzione

$$\frac{5+i}{5-i} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13} i \Longrightarrow Re\left(\frac{5+i}{5-i}\right) = \frac{12}{13}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' = t^2$$

- Eq omogenea: $y'' + y' = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \Longleftrightarrow$

$\lambda = 0$, $\lambda = -1$, quindi $y_0(t) = C_1 + C_2 e^{-t}$

- Sol. Particolare $\bar{y}(t) = t(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)$

$$\begin{cases} 3a_2 = 1 \\ 6a_2 + 2a_1 = 0 \\ 2a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{1}{3} \\ a_1 = -1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

- Integrale generale: $y(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + t\left(\frac{1}{3}t^2 - t + 2\right)$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x) - x^2}{x^3 + x^5}$$

Risoluzione

$x^3 + x^5 \sim x^3$

$e^x - \sin(x) - \cos(x) - x^2 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$

$- \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - x^2 =$

$= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x) - x^2}{x^3 + x^5} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare e disegnare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2 - x}$$

Risoluzione

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$f(x) > 0 \iff x^2 - x > 0 \iff x < 1$ e $x > 0$

LIMITI

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{e^{2x+1}(2x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - x)^2}$$

$2x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$