Appello del 5.2.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2+1 punti]

(i) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dare la definizione di derivabilitá di f in x_0.

(ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non derivabile in $x_0 = 3$.

(iii) Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(|x|)$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = |x-3|$

(iii) Per $x \neq 0$, $f'(x) = \cos(|x|)\frac{x}{|x|}$, Per $x=0$, $\lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(|h|)}{h} = 1$, $\lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(|h|)}{h} = -1$, quindi f non è derivabile

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di dominio x-semplice

(ii) Enunciare il teorema di Fubini-Tonelli.

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Se entrambi le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hanno un punto di minimo assoluto in $x = 0$, allora

- [a] $f + g$ é derivabile in 0 e $(f + g)'(0) = 0$
- [b] $|fg|$ é limitata in $\mathbb{R}$
- [X] $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m - g(x)$;
- [d] $f(x)g(x) \geq f(0)g(0)\ \forall x \in \mathbb{R}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè f, g hanno un minimo assoluto in $x=0$, $\exists\ m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m_1$, $g(x) \geq m_2$ $\forall x \in \mathbb{R}$, da cui

$$f(x)+g(x) \geq m_1 + m_2 = m \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $-2z + 6z\bar{z} = 4$. Allora

- [X] $Im(z) = 0$
- [b] $Re(z) = 0$
- [c] $|z| = 1$
- [d] $Re(z) - Im(z) = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$z = a + ib$, si ha $-2a + 6(a^2+b^2) - 2bi = 4$ e

quindi necessariamente $Im(z) = b = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$

- [a] converge semplicemente
- [b] converge assolutamente
- [c] non converge
- [X] Nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

[a] no, per $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ oscilla

[b] no, per $a_n = n$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge semplicemente, ma non assolutamente

[c] no, per $a_n = n$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{y(t)^2} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili con $g(y) = 1/y^2$, $h(t) = \sqrt{t}$;
poiché $g \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $h \in C^0((0,+\infty))$, $\exists!$ sol. in un intorno di $t_0 = 1$
per ogni $\alpha \neq 0$ ($\alpha = 0$ non è accettabile)

- Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff 1/\alpha^2 = 0$ impossibile

- Separazione variabili: $\displaystyle\int_\alpha^{y(t)} r^2\,dr = \int_1^t \sqrt{r}\,dr \iff$

$$\frac{y^3(t)}{3} - \frac{\alpha^3}{3} = \frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3} \iff y^3(t) = \alpha^3 + 2(t^{3/2} - 1) \iff$$

$$y(t) = \sqrt[3]{\alpha^3 + 2(t^{3/2} - 1)}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{e^{x^4} - e^{x^5}}$$

Risoluzione

$$e^{x^4} - e^{x^5} = (1 + x^4 + o(x^4)) - (1 + x^5 + o(x^5)) = x^4 + o(x^4) \sim x^4$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\ ;\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2 = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \frac{3}{2}x^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4) \sim \frac{11}{24}x^4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{e^{x^4} - e^{x^5}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{11}{24}x^4}{x^4} = \frac{11}{24}$$

Esercizio 6 [5 punti]

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \ln(x) - \arctan(x-1)$$

Risoluzione

- Dominio: $(0, +\infty)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

- $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+(x-1)^2} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{x(x^2-2x+2)}$

$f'(x) = 0 \iff x = 1,\ x = 2$ punti critici

$f'(x) > 0 \iff x \in (0,1) \cup (2, +\infty)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (1,2)$

$x = 1$ max locale, $x = 2$ min locale

$f(1) = 0$, $f(2) < 0$