D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 5.9.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di somma parziale n-sima per una serie numerica;

(ii) Dare la definizione di convergenza per una serie numerica.

Risposta

(i) ______________________________

(ii) ______________________________

CORREZIONE

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il teorema del Gradiente.

Risoluzione

(i) ______________________________

(ii) ______________________________

Esercizio 1

[3 punti]

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0^+$, $-2 \le b_n \le 2$, allora

[a] $\lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{a_n} = +\infty$

[X] $\lim_{n\to\infty} a_n b_n^2 = 0$

[c] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 |b_n| < +\infty$

[d] $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) No, per $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

c) No, per $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = 1$

d) No, per $a_n = b_n = \frac{1}{n}$

Esercizio 2

[3 punti]

Dato l'insieme $D = \{|x| : x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (x-2)(x-1) < 0\}$, allora

[X] $\inf(D) = 1$, $\sup(D) = 2$

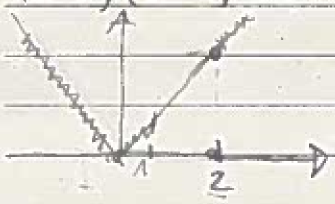
[b] $\min(D) = 0$, $\sup(D) = 2$

[c] $\inf(D) = -\infty$, $\sup(D) = +\infty$

[d] $\inf(D) = 0$, $\sup(D) = +\infty$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$(x-2)(x-1) < 0 \iff x \in (+1, 2)$



Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to R$ differenziabile in $(0,0)$ e $Df(0,0) = (0,0)$. Allora

[a] $(0,0)$ é un punto di estremo per f;

[X] il piano $z = \cancel{0}\ f(0,0)$ é tangente al grafico di f in $(0,0)$;

[c] Se $f(0,0) \neq 0$, allora f é discontinua in $(0,0)$;

[d] $\exists$ un versore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché f è differenziabile in $(0,0)$, allora esiste il piano tangente in $(0,0)$ di equazione

$$z = f(0,0) + Df(0,0)\cdot(x,y) = f(0,0)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty}(3n^3+2)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)$$

Risoluzione

$\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n} \sim -\frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}$ per $n \to +\infty$

$3n^3+2 \sim 3n^3$

quindi

$$\lim_{n\to\infty}(3n^2+2)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di $f(x,y)=y^3+y^2+x^2+2xy-3y+1$ e classificarli

Risoluzione

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, Inoltre $Df(x,y)=(2x+2y, 3y^2+2y+2x-3)$

quindi $Df(x,y)=(0,0)$ se

$$\begin{cases} x=-y \\ 3y^2+2y-2y-3=0 \iff y=\pm 1 \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono $P_1=(-1,1)$, $P_2=(1,-1)$

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6y+2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(-1,1)=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$ punto di minimo locale

$$H(1,-1)=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$ punto di sella

Esercizio 6

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t) + t(1+2e^{t^2})\cos^2(y(t)) = 0 \\ y(4) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Risoluzione

Riportando l'equazione in forma normale si ha

$y'(t) = -\cos^2(y(t))\cdot t(1+2e^{t^2})$

equazione a variabili separabili

con $g(y) = -\cos^2(y)$, $f(t) = t(1+2e^{t^2})$

Poiché

$g(\frac{\pi}{2}) = 0$, l'unica sol del pb.

è $y(t) = \frac{\pi}{2}$ $\forall t > 0$