Appello del 6.2.2018: Compito B

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

(i) definire la successione delle ridotte N-esime;

(ii) dare la definizione di convergenza della serie;

(iii) fare un esempio di serie convergente, ma non assolutamente convergente.

Risposta

(i)

(ii)

(iii)

Domanda 2

[2+3 punti]

Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

(i) dare la definizione di derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$;

(ii) dare la definizione di differenziabilità di f in (x_0, y_0).

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua, allora

- [a] $|f(x)| > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- [b] $\lim_{x \to +\infty} f(x) > -\infty$;
- [c] f é limitata inferiormente;
- [X] esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per il teo. di Weierstrass, f è limitata in $[-1,1]$ e quindi in $(-1,1)$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = \ln^2(1 + |x|)$, $x \in \mathbb{R}$,

- [X] é derivabile in 0
- [b] é monotona
- [c] é dispari
- [d] ha massimo assoluto in $\mathbb{R}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln^2(1+|h|)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\ln^2(1+|h|)}{|h|^2}}_{\to 1} \cdot \frac{|h|^2}{h} = 0$, quindi $f'(0) = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $b_n \neq 0$ e $a_n = \sin(b_n)/\sinh(b_n)$

- [X] $\{a_n\}$ converge se $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$
- [b] $\{a_n\}$ é limitata
- [c] $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- [d] $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$-\frac{1}{\sinh(b_n)} \leq a_n \leq \frac{1}{\sinh(b_n)}$ $\quad (-1 \leq \sin(b_n) \leq 1)$

Poiché $\lim_{n \to \infty} \sinh(b_n) = +\infty$, per il teo. del confronto

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan(x) - x}$$

Risoluzione

Possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$$

$$\sin(x) - x\cos(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x - 1 + \ln(1-x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - 1 + \left(-x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

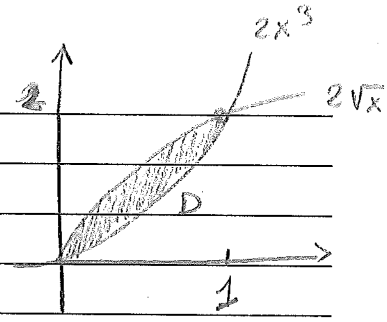
$$\lim_{x\to 0} \cos(x) \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\sin(x) - x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{3}x^3} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare $\iint_D (x+y)dx\,dy$, ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^3 \le y \le 2\sqrt{x}\}$ (disegnare il dominio).

Risoluzione



Y - semplice

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{2x^3}^{2\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^{3/2} + 2x - 2x^4 - 2x^6\right) dx =$$

$$= \left[\frac{4}{5}x^{5/2} + x^2 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{7}x^7\right]_0^1 = \frac{4}{5} + 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{39}{35}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \cos(t)$ con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Risoluzione

Eq. del 2° ordine a coeff. costanti non omogenea

- Eq. omogenea: $y'' - 2y' + 2y = 0$

Pol. caratteristico: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \longmapsto \lambda = 1 \pm i$

$$y_0(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t)$$

- Sol. particolare (Metodo di somiglianza)

$f(t) = \cos(t)$ $\quad \left.\begin{matrix} m = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 1 \end{matrix}\right\}$ $\pm i$ non è sol. dell'eq. caratt

$\bar{y}(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$

Sostituendo nell'eq. si ottiene $\begin{cases} A - 2B = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{2}{5} \end{matrix}$

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t)$$

- Sostituendo le condizioni iniziali in:

$$y(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t) + \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t)$$

si ottiene

$$y(0) = C_1 + \frac{1}{5} = 0 \Longrightarrow C_1 = -\frac{1}{5}$$

Derivando e calcolando in $t = 0$

$$y'(0) = -\frac{1}{5} + C_2 - \frac{2}{5} \Longrightarrow C_2 = \frac{3}{5}$$

da cui

$$y(t) = -\frac{1}{5} e^t \cos(t) + \frac{3}{5} e^t \sin(t) + \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t)$$