Appello del 6.6.2022: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x\sqrt{x}$ nel punto $x_0 = 4$

Risposta

(i)

(ii) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; $f(4) = 8$; $f'(4) = 3$

$y = 8 + 3(x-4) = 3x - 4$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema del Valor Medio di Lagrange.

(ii) Spiegare con un disegno l'interpretazione geometrica del teorema di Lagrange

Risoluzione

(i)

(ii)

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ equivale a dire che esiste un punto c in cui la retta tangente al grafico di f è parallela alla retta secante per gli estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Esercizio 1

[3 punti]

L'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$

- [a] converge per ogni $\alpha > 0$
- [b] converge per $\alpha = 1$
- [X] non converge per $\alpha \geq 1$;
- [d] converge per $\alpha > 1$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge per $\alpha < 1$

Esercizio 2

[3 punti]

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)^n$ é

- [X] convergente
- [b] divergente
- [c] oscillante
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare, non negativa e tale che $f'(x) = e^{f(x)} f(x)$. Allora f é

- [X] convessa
- [b] concava
- [c] decrescente
- [d] Nessuna delle precedenti

(si consiglia di derivare l'identità $f'(x) = e^{f(x)} \cdot f(x)$)

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $f(x) \geq 0$, $e^{f(x)} > 0$, allora $f'(x) \geq 0$ e

$f''(x) = e^{f(x)} f'(x) \cdot f(x) + e^{f(x)} f'(x) \geq 0$, quindi

f è convessa

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare l'integrale generale dell'equazione $y''(t) + y(t) = t$.

Risoluzione

- Eq. omogenea: $y''(t) + y(t) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

  $y_0(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$

- Sol. particolare: $\bar{y}(t) = a_1 t + a_0$, $\bar{y}'(t) = a_1$, $\bar{y}''(t) = 0$

  $\Longrightarrow \bar{y}(t) = t$

- Integrale generale: $y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + t$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x) - x^2}{x^3}$$

Risoluzione

$$e^x - \sin(x) - \cos(x) - x^2 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$$

$$- \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) - x^2 = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x) - x^3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione

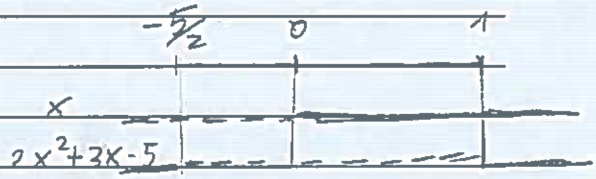
$$f(x)=\frac{x}{2x^2+3x-5}$$

Risoluzione

$2x^2+3x-5=0 \iff x=-\frac{5}{2}$ e $x=1$

- dominio: $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2},1\right\}$ (non ci sono simmetrie)

- Segno: $f(x)=0 \iff x=0$



$f(x)\geq 0 \iff x\in\left(-\frac{5}{2},0\right]\cup(1,+\infty)$

$f(x)\leq 0 \iff x\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup[0,1)$

- limiti

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

Derivata: Per $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2},1\right\}$

$f'(x)=\dfrac{-2x^2-5}{(2x^2+3x-5)}<0 \implies f$ decrescente