D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 9.2.2021: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

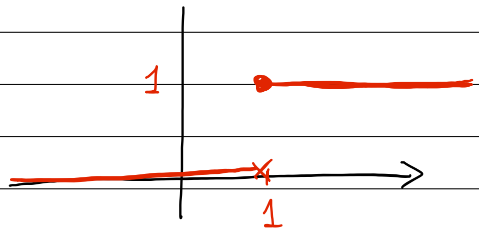
(i) Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

(ii) Fare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to 1} f(x)$ non esiste.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$



Domanda 2

[~~2~~3+~~3~~2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

(ii) Trovare i punti critici della funzione $F(x) = \int_0^x (e^{-t^2} - 1)dt$

Risoluzione

(i)

(ii) $F'(x) = e^{-x^2} - 1 = 0 \iff x = 0$

quindi $x = 0$ è l'unico punto critico

Esercizio 1 **[3 punti]**

La successione $\frac{n+1}{n+2}$

- [a] é superiormente limitata ma non converge;
- [b] non é limitata;
- [c] é decrescente e convergente;
- [X] é inferiormente limitata e crescente.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Riscrivendo $\frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$, si vede subito che la successione è crescente e inoltre $0 < \frac{n+1}{n+2}$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Allora

- [a] f é identicamente nulla in $[0, 1]$
- [X] esiste $c \in [0, 1]$ tale che $f(c) = 0$
- [c] f é derivabile ed esiste $c \in [0, 1]$ tale che $f'(c) = 0$
- [d] Se F é una primitiva di f, allora $F'(1) = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

a), b), d) possono essere escluse considerando la funzione $f(x) = x - \frac{1}{2}$ in $[0,1]$. Si ha $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, ma f non è identicamente nulla, $f'(x) = 1$ $\forall x \in [0,1]$ e, se F è una primitiva di f, allora $F'(x) = f(x)$ e quindi $F'(1) \neq 0$

Esercizio 3 **[3 punti]**

Sia $A \subset \mathbb{R}$, limitatato e non vuoto, tale che $\forall \epsilon > 0$, $\exists a \in A$ per cui $a > 3 - \epsilon$. Allora

- [a] $3 \in A$;
- [b] $A \cap (2, 4)$ é non vuoto;
- [X] $\sup A \geq 3$;
- [d] 3 é un minorante di A.

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) no perchè per $A = (3,4)$ è verificata la condizione

b) no perchè per $A = (5,6)$ è verificata la condizione e $A \cap (2,4) = \phi$

d) no, perchè per $A = [2,4]$ è verificata la condizione

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = te^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

1) Eq. omogenea: $y'' + y' = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

$y_0(t) = C_1 + C_2 e^{-t}$

2) Sol. particolare: $f(t) = te^t \Rightarrow m=1,\ \gamma = 1,\ \delta = 0 \Rightarrow \bar{y}(t) = e^t(At+B)$

$\bar{y}'(t) = e^t(At+B) + e^t A = e^t(At+A+B)$, $\bar{y}''(t) = e^t(At+A+B) + e^t A =$

$= e^t(At+2A+B)$. Sostituendo $e^t(At+2A+B) + e^t(At+A+B) = e^t t$

da cui $\begin{cases} 2A = 1 & \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ 3A + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{2}A = -\frac{3}{4} \end{cases}$

3) Integrale generale: $y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + e^t\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)$

4) Condizioni iniziali: $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{4} = 0$, $y'(0) = -C_2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow C_2 = -\frac{5}{4}$, $C_1 = \frac{3}{4} - C_2 = 2$

Sol. del pb. di Cauchy

$$y(t) = 2 - \frac{5}{4}e^{-t} + e^t\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{-x^3} - 1)(1 - \cos(2x))}{\ln(1 + x^5)}$$

$\cos(t) = 1 -$

Risoluzione

$\ln(1+x^5) \sim x^5$ per $x \to 0$

$e^{-x^3} - 1 = -x^3 + o(x^5)$, $1 - \cos(2x) = +\frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^5)$

$(e^{x^3} - 1)(1 - \cos(2x)) = (-x^3 + o(x^5))(+2x^2 - \frac{16}{24}x^4 + o(x^5)) = -2x^5 + o(x^5)$

Sostituendo nel limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{-x^3} - 1)(1 - \cos(2x))}{\ln(1 + x^5)} = \lim_{x \to 0} -\frac{2x^5}{x^5} = -2$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{|x|}{x^2+2x-3}$ e tracciarne un grafico approssimativo

Risoluzione

Dominio : $x^2+2x-3 \neq 0$, quindi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

Segno : $f(x) > 0 \iff x^2+2x-3 > 0 \iff x \in (-\infty;3) \cup (1,+\infty)$

$f(x) < 0 \iff x^2+2x-3 < 0 \iff x \in (-3,1)$

Zeri : $f(x) = 0 \iff x = 0$

limiti : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \end{cases}$

Studio della derivata:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+2x-3} & x > 0 \\[2ex] \dfrac{-x}{x^2+2x-3} & x < 0 \end{cases}$$

- Per $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-3 - x(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{-x^2-3}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{-(x^2+3)}{(x^2+2x-3)^2}$

quindi $f'(x) < 0 \quad \forall x > 0$

- Per $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{(x^2+3)}{(x^2+2x-3)^2}$, quindi $f'(x) > 0 \ \forall x < 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{3}$, quindi f non deriv. in $x=0$