D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 7.1.2014: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1 [3+2 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione numerica $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Descrivere il comportamento della successione $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Domanda 2 [2+3 punti]

(i) Dare la formula per il polinomio di Taylor $T_n(x)$ di ordine n in un punto x_0

(ii) Enunciare il Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Peano.

Risposta

(i) $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

(ii) Vedi appunti

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni, di cui la prima converge e la seconda non converge. Allora la successione $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- [a] non converge, ma é limitata
- [b] non converge
- [c] converge
- [~~d~~] Nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) falso per $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$

b) falso per $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$

c) falso per $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}(1 - e^x)$ é

- [a] dispari
- [b] limitata
- [~~c~~] derivabile in $\mathbb{R}$
- [d] non derivabile in 0

Risoluzione (giustificare la risposta)

Bisogna controllare solo $x=0$, ove $\sqrt[3]{x}$ non è derivabile.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\,(1-e^h)-0}{h} = 0$$

Esercizio 3

[3 punti]

Il numero complesso $\frac{i-7}{i+7}$

- [a] ha parte reale strettanente negativa
- [b] ha parte reale strettanente positiva
- [c] é puramente immaginario
- [d] é reale

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\frac{i-7}{7+i} = \frac{i-7}{7+i} \cdot \frac{7-i}{7-i} = \frac{i^2+7^2-2\cdot 7\cdot i}{1^2+7^2} =$$

$$= \frac{48}{50} + \frac{14}{50} i$$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t^\alpha}{y(t)} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Risoluzione

Si tratta di una equazione a variabili separabili:

$$\int_2^{y(t)} r\,dr = \int_1^t s^\alpha\,ds$$

1) $\alpha = -1$

$$\frac{y^2(t)}{2} - 2 = \ln|t| - \cancel{\ln|1|} \iff$$

$$y(t)^2 = 2(2+\ln|t|) \iff y(t) = \sqrt{2(2+\ln(t)}$$

2) $\alpha \neq -1$ $\quad \dfrac{y^2(t)}{2} - 2 = \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \dfrac{1}{\alpha+1} \iff$

$$y(t)^2 = 2\left(2 - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \iff y(t) = \sqrt{2\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha+1} + \frac{t^{\alpha+1}}{a+1}\right)}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^2) - x^3}{e^{x^7} - 1}$$

Risoluzione

$e^{x^7} - 1 \sim x^7$ per $x \to 0$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^7)$$

$$x\sin(x^2) - x^3 = x^3 - \frac{x^7}{3!} + o(x^7) - x^3 \sim -\frac{x^7}{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^2) - x^3}{e^{x^7}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^7}{6}}{x^7} = -\frac{1}{6}$$

Esercizio 6 **[4 punti]**

Calcolare

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}}\,dx$$

Risoluzione

Per sostituzione

$$t = \sqrt{3x+5} \iff x = \frac{t^2-5}{3}$$

$$dx = \frac{2}{3}t\,dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}}\,dx = \int \frac{t^2-5}{3t}\,\frac{2}{3}t\,dt =$$

$$= \int \frac{2}{9}(t^2-5)\,dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} - 5t\right) + c =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{(3x+5)^{3/2}}{3} - 5\sqrt{3x+5}\right) + c$$

Si poteva risolvere anche per parti