D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E5	
Σ	

Appello del 10.1.2012: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$.

Risposta

(i)

(ii)

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff y = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il Teorema di Fermat per funzioni di più variabili

Risoluzione <u>**(giustificare la risposta)**</u>

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivabile allora

[a] f potrebbe non essere continua

[b] Se f é invertibile, allora f^{-1} é derivabile

~~[c]~~ $f \circ f$ é derivabile

[d] $|f|$ é derivabile

Risoluzione (giustificare la risposta)

c) composizione di funzioni derivabile è derivabile

Esercizio 2

[3 punti]

Se $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ é una funzione crescente tale che $\int_2^4 f(x)dx = 1$, allora

[a] $f(x) = 1$ per qualche $x \in [2,4]$

~~[b]~~ $f(4) \geq \frac{1}{2}$

X [c] $f(2) \geq 1$

[d] $f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [2,4]$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$1 = \int_2^4 f(x)\,dx \leq f(4)(4-2) \Rightarrow f(4) \geq \frac{1}{2}$

(infatti f crescente $\Rightarrow f(x) \leq f(4)$ $\forall x \in [2,4]$)

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora

[a] Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge

[b] Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

[c] Se $a_n \to +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge

~~[d]~~ Nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

[a] falsa, perchè $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

[b] falsa, perchè $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ non converge

[c] $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin(t)}{4(1-\cos(t))^{3/4}}\,dt$$

Risoluzione

$x = \cos(t) \qquad dx = -\sin(t)\,dt$

$$\int \frac{3\sin(t)}{4(1-\cos(t))^{3/4}}\,dt = \int -\frac{3}{4}\frac{1}{(1-x)^{3/4}}\,dx =$$

$$= \left[+\frac{3}{4}(1-x)^{1/4}\cdot 4\right] + C = +3(1-\cos(t))^{\frac{1}{4}} + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin(t)}{4(1-\cos(t))^{3/4}}\,dt = \lim_{c\to 0^+}\int_c^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin(t)}{4(1-\cos(t))^{\frac{3}{4}}}\,dt = \lim_{c\to 0^+}\left[+3(1-\cos(t))^{\frac{1}{4}}\right]_c^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= +3$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{e^x-\sin(x)-\cos(x)}$$

Risoluzione

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x = -\frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$e^x - \sin(x) - \cos(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) =$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{e^x-\sin(x)-\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{8}}{x^2} = -\frac{1}{8}$$

Esercizio 6 **[5 punti]**

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = (x + y - 3)e^{xy}$ e classificarli.

Risoluzione

$f \in C^2$, $Df(x,y) = \left(e^{xy}(x+y-3)y + e^{xy},\ e^{xy}(x+y-3)x + e^{xy}\right)$

$Df(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} y^2 + xy - 3y + 1 = 0 \\ x^2 + xy - 3x + 1 = 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} (x-y)(x+y) - 3(x-y) = 0 \\ y^2 + xy - 3y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(x+y-3) = 0 \\ y^2 + xy - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y \\ y^2 + y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases} \iff y = 1,\ y = \frac{1}{2} \implies P_1 = (1,1),\ P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\begin{cases} x = -y + 3 \\ y^2 + (-y+3)y - 3y + 1 = 0 \end{cases} \implies$ impossibile

$f_{xx}(x,y) = (e^{xy}y^2(x+y-3) + e^{xy} + ye^{xy}$

$f_{xy}(x,y) = (e^{xy}xy(x+y-3) + e^{xy}(x+y-3) + e^{xy}y + e^{xy} \cdot x$

$f_{yy}(x,y) = (e^{xy}x^2(x+y-3) + e^{xy} + xe^{xy}$

$Hf(1,1) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \longrightarrow$ $(1,1)$ punto di minimo locale

$Hf\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{4}} & -\frac{3}{2}e^{\frac{1}{4}} \\ -\frac{3}{2}e^{\frac{1}{4}} & e^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \longrightarrow$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ punto di sella