E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 11.6.2013: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+2 punti]

(i) Dare la definizione di minorante di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Dare la definizione di estremo inferiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

Risposta

(i) ____

(ii) ____

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il Teorema del Gradiente

Risposta

(i) ____

(ii) ____

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Allora

- [a] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = +\infty$
- [b] (X) $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M$
- [c] $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall M > 0$, $a_n > M$
- [d] a_n é asintotica a n

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per def. di $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Sia A, B due insiemi non vuoti. Allora $\inf(A \cup B)$

- [a] é strettamente maggiore di uno tra $\inf A$ e $\inf B$
- [b] (X) é il minimo tra $\inf A$ e $\inf B$
- [c] é il massimo tra $\inf A$ e $\inf B$
- [d] é strettamente minore di uno tra $\inf A$ e $\inf B$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $\inf(A \cup B) \leq \inf(A)$ e $\inf(A\cup B) \leq \inf(B)$, quindi $\boxed{a}$ e $\boxed{c}$ escluse. Inoltre supponendo che $A = B$ allora $\inf(A \cup B) = \inf(A) = \inf(B)$ e quindi $\boxed{d}$ esclusa

Esercizio 3 **[3 punti]**

Sia $f(x) = (x^4 + x^2)e^{-|x|}$

- [a] é monotona in $\mathbb{R}$
- [b] f non é derivabile in 0
- [c] (X) f é limitata in $\mathbb{R}$
- [d] $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$ e f continua in $\mathbb{R}$, quindi f limitata in $\mathbb{R}$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-\alpha}{n+\alpha}\right)^n$ al variare di $\alpha > 0$.

Risoluzione

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-\alpha}{n+\alpha}\right)^n = "1^\infty" = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-\alpha}{n+\alpha}-1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2\alpha}{n+\alpha}\right)^{n+\alpha} \cdot \left(1-\frac{2\alpha}{n+\alpha}\right)^{-\alpha} = e^{-2\alpha}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_1^2 \frac{1}{x(9-\log^2(x))}dx.$$

Risoluzione

Per sostituzione $t = lg(x)$ $\quad x=1 \to t=0$

$dt = \frac{1}{x}dx \quad x=2 \mapsto t = lg(2)$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(9-lg^2(x))}dx = \int_0^{lg(2)} \frac{1}{(9-t^2)}dt =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{lg\,2}\frac{1}{3-t}dt + \frac{1}{6}\int_0^{lg(2)}\frac{1}{3+t}dt = \frac{1}{6}\Big[-\ln|3-t|\Big]_0^{lg(2)} +$$

$$\frac{1}{6}\Big[lg|3+t|\Big]_0^{lg(2)}$$

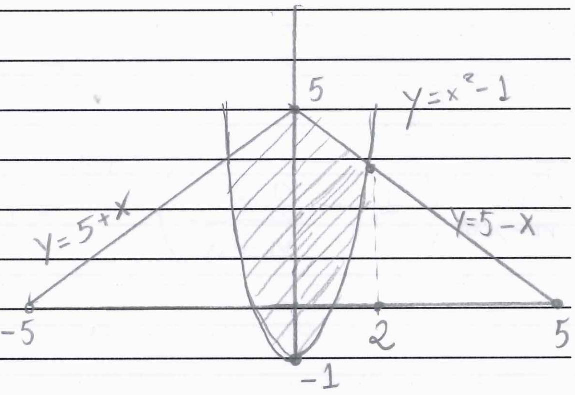
Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare la misura di D ove D é il dominio $D = \{(x, y) : x^2 - 1 \le y \le 5 - |x|\}$

Risoluzione

$$m(D) = \iint_D 1 \, dx dy =$$



Poiché il dominio è simmetrico è sufficiente integrare su metà dominio, quindi

$$m(D) = 2\int_0^2 \int_{x^2-1}^{5-x} dy \, dx = 2\int_0^2 (5 - x - x^2 + 1) dx =$$

$$= 2\left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[12 - 2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{44}{3}$$