Appello del 17.2.2012: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

(i) definire la successione delle ridotte N-esime.

(ii) Dare la definizione di convergenza della serie.

(iii) Fare un esempio di serie oscillante.

Risposta

(i) $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) La serie converge se esiste $\lim_{n \to \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è una serie oscillante

Domanda 2

[2+2+1 punti]

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

(i) dare la definizione di funzione integrale di f;

(ii) enunciare il Teorema Fondamentale del calcolo integrale (con le opportune ipotesi);

(iii) Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}$

Risoluzione

(i) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$

(ii) TEO: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale, allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

(iii) Con l'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua, allora

- [a] f é limitata superiormente;
- [b] esiste c tale che $f(c) = 0$;
- [c] $f^2(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- [X] esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in (1, 5)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teo. di Weierstrass, $\exists M = \max\limits_{[1,5]} f$. Segue che

$f(x) \leq M \quad \forall x \in (1,5) \subseteq [1,5]$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f(x) = x^6 + 6x^5 + 3x + 1$ e sia $T_8(x)$ il polinomio di Taylor di ordine 8 di f in $x_0 = 0$. Alora $T_8(1)$ vale

- [a] -1
- [X] 11
- [c] 0
- [d] π

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $f(x)$ è un polinomio di grado 6, si ha $T_8(x) = f(x)$, quindi $T_8(1) = f(1) = 11$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

- [X] converge semplicemente
- [b] non converge assolutamente
- [c] non converge
- [d] converge semplicmente, ma non converge assolutamente.

Risoluzione (giustificare la risposta)

b) falsa, perchè $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

c) falsa, infatti la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge assolutamente (vedi (b)) e quindi converge

d) vedi (b)

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) + y(t) = e^{-t}$ con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Risoluzione

- Sol. eq. omogenea: $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$, quindi

$$y_0(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$$

- Sol. particolare eq. non omogenea (metodo di somiglianza)

$$\bar{y}(t) = C e^{-t} \implies C = \frac{1}{2}, \text{ quindi } \bar{y}(t) = \frac{1}{2} e^{-t}$$

- Sol. del problema di Cauchy

$$y(t) = +\frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)$$

Esercizio 5

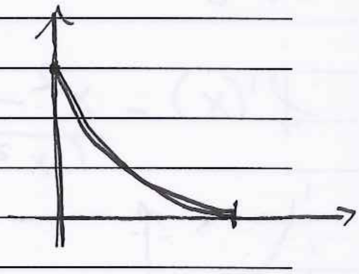
[5 punti]

Calcolare $\iint_D (x + y)dx\,dy$, ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \sqrt{x} + y \leq 1\}$ (disegnare il dominio).

Risoluzione

$$D = \{(x, y) : x \in [0, 1],\ 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{x}\}$$

è y-semplice



$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x(1-\sqrt{x}) + \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x - x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} - \sqrt{x} \right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

Esercizio 6 **[4 punti]**

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$.

Risoluzione

$x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3$ e $x = -2$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

$f(x) = 0 \iff x = 1$

$f(x) > 0 \iff \begin{cases} x-1>0 \\ x^2-x-6>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1<0 \\ x^2-x-6<0 \end{cases} \iff$

$x \in (-2, 1) \cup (3, +\infty)$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (asintoto orizzontale)

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 7}{(x^2 - x - 6)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$