Appello del 2.9.2013: Compito A

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2 punti]

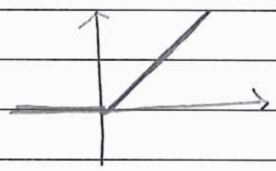
(i) Dare la definizione di derivata di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Fare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che la sua derivata destra in 0 sia 1 e la sua derivata sinistra in 0 sia 0.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunicare il Teorema di cambiamento di variabili per gli integrali doppi

(ii) Esprimere in coordinate polari il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) : \rho \in [1, 3],\ \vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \right\}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora

[a] $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste finito

[b] $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata

~~[c]~~ $\left\{\frac{1}{1+|a_n|}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata;

[d] $\left\{\left|\frac{1}{1+a_n}\right|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $1+|a_n| \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+|a_n|} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $(0,0)$ e tale che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Allora

[a] f é continua in $(0,0)$

[b] $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ per ogni versore v

[c] $(0,0)$ é un punto di estremo locale

[d] nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

[a] No, perchè derivabilità $\not\Rightarrow$ continuità

[b] No, perchè derivabilità $\not\Rightarrow$ esistenza derivate direzionali

[c] No, perchè $Df(0,0)=(0,0)$ non implica esistenza punto estremale in $(0,0)$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^4} dt$ é

[a] crescente in $(0,+\infty)$

[b] decrescente in $(0,+\infty)$

[c] non limitata in $(0,+\infty)$

[d] negativa in $(0,+\infty)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$F'(x) = e^{-x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

quindi F crescente in $(0,+\infty)$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^n + 2n!}{5n^{11} + 3e^{n\ln(n)}}$$

Risoluzione

Si osservi che $e^{n\ln(n)} = e^{\ln(n^n)} = n^n$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^n + 2n!}{5n^{11} + 3e^{n\ln(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 + 2\frac{n!}{n^n}}{5\frac{n^{11}}{n^n} + 3} = \frac{7}{3}$$

(per la gerarchia degli infiniti)

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\int_{e^{-1}}^{e^2} |\ln(x)|\, dx$$

Risoluzione

$$\int_{e^{-1}}^{e^2} |\ln(x)|\, dx = \int_{e^{-1}}^{1} (-\ln(x))\, dx + \int_{1}^{e^2} \ln(x)\, dx$$

$$\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln(x) - x + C$$

$$\int_{e^{-1}}^{e^2} |\ln(x)|\, dx = \Big[-x\ln(x) + x\Big]_{e^{-1}}^{1} + \Big[x\ln(x) - x\Big]_{1}^{e^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} + e^2\ln(e^2) - e^2 -$$

$$+1 = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 2e^2 - e^2$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = e$ (Asintoti orizzontali)

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

$$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -2e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

$f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (non ci sono punti critici)

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0$

$$f''(x) = 4e^{\frac{x+1}{x-1}} \frac{2+x}{(x-1)^4} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$f''(x) = 0$ se $x = -2$

$f''(x) < 0$ se $x < -2$

$f''(x) > 0$ se $x \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$