D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 5.7.2012: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}$, non vuoto,

(i) Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(ii) Dare la definizione di continuità di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$

(iii) Fare un esempio di funzione discontinua in $x_0 = 1$.

Risposta

(i) ______________________________

(ii) ______________________________

(iii) ______________________________

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di funzione integrale

(ii) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Risoluzione

(i) ______________________________

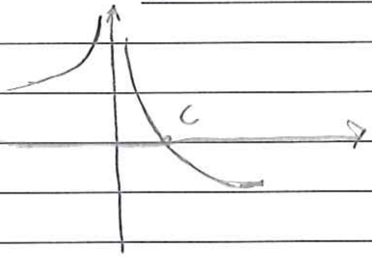
(ii) ______________________________

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{1}{|x|} - sgn(x)$ se $x \neq 0$. Allora

- [a] f é limitata in $\mathbb{R}$
- [b] f é positiva in $\mathbb{R}$
- [☒ c] esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(c) = 0$;
- [d] f é pari

Risoluzione (giustificare la risposta)



Esercizio 2 **[3 punti]**

Tra gli infiniti (per $x \to +\infty$) $f(x) = e^x x^4$, $g(x) = \frac{e^{2x}}{x}$, $h(x) = e^{\sqrt{x}} x^6$, quelli di ordine superiore e inferiore sono

- [a] f, h
- [☒ b] g, h
- [c] g, f
- [d] h, f

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^5} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-\sqrt{x}}}{x^2} = +\infty$

Esercizio 3 **[3 punti]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare tale che $f'(x) - 1 - (f(x))^2 = 0$ per $x \in (-1, 1)$. Allora f ha in $x = 0$ un punto di

- [☒ a] crescenza stretta
- [b] decrescenza stretta
- [c] massimo relativo
- [d] minimo relativo

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $f'(x) = 1 + (f(x))^2 > 0$ per $x \in (-1, 1)$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{4\sin(t)}{3y^2(t)(1+\cos^2(t))} \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili con $g(y) = \frac{1}{3y^2}$, $f(t) = \frac{4\sin(t)}{1+\cos^2(t)}$

$g(1) \neq 0$ no sol. stazionarie

$$\int_1^{y(t)} 3r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{4\sin(s)}{1+\cos^2(s)} ds \iff$$

$$\left[r^3 \right]_1^{y(t)} = -4 \left[\arctan(\cos(s)) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{t} \iff$$

$$y^3(t) - 1 = -4\arctan(\cos(t)) + \cancel{\arctan(0)} =$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \cos(x) + 1}{x^2 + 2x + 1 - \frac{e^x - 1}{x}}$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin(x) - \cos(x) + 1)}{x^3 + 2x^2 + x - e^x + 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{5}{2}x^2} = \frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\ \cos(x) - 1 &= -\frac{x^2}{2!} + o(x^3) \end{aligned}\right\} \sin(x) - \cos(x) + 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots \sim x$$

Sviluppiamo al 2° ordine il denominatore

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \implies x^3 + 2x^2 + x - e^x + 1 = 2x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{3}{2}x^2$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(x+4) - x|x|$$

Risoluzione

$\mathcal{D}_f = (-4, +\infty)$, $f(0) = \ln(4)$

$\lim_{x \to (-4)^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+4) - x^2 & x \geq 0 \\ \ln(x+4) + x^2 & x \in (-4, 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+4} + 2x = \frac{2x^2+8x+1}{x+4} & x \in (-4, 0) \\ \frac{1}{x+4} - 2x = -\frac{2x^2+8x-1}{x+4} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{4}$ (f derivabile in 0)

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & x \in \left(-4, \frac{-4-\sqrt{14}}{2}\right) \cup \left(\frac{-4+\sqrt{14}}{2}, \frac{-4+\sqrt{18}}{2}\right) \\ < 0 & x \in \left(\frac{-4-\sqrt{14}}{2}, \frac{-4+\sqrt{14}}{2}\right) \cup \left(\frac{-4+\sqrt{18}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$