Appello del 4.6.2012: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}$, non vuoto,

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione di un insieme D.

(ii) Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

(iii) Fare un esempio di una funzione f tale che $\lim_{x \to 1} f(x)$ non esiste.

Risposta

(i)

(ii)

(iii) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

Domanda 2

[2+2 punti]

(i) Dare la definizione di successione monotona

(ii) Enunciare il teorema sul limite delle successioni monotone.

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Allora

$\boxtimes$ a $\lim_{x\to+\infty} \sin(f(x)) = 0$

b $\lim_{x\to+\infty} f(\sin(x)) = 0$

c $f \sim e^{-x}$ per $x \to +\infty$;

d $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema del limite della funzione composta poiché $\lim_{y\to 0} \sin(y) = 0$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{1+a_n}$

$\boxtimes$ a converge assolutamente

b diverge

c oscilla

d nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Si ha $0 \leq \frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$, da cui $\left|\frac{(-1)^n a_n}{1+a_n}\right| = \frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$ e per il teorema del confronto, la serie converge assolutamente

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suriettiva, allora f é

a continua

b strettamente monotona

$\boxtimes$ c non limitata

d pari

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ne segue che $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in [-1, 1]$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 2t\sqrt{1 - y(t)^2} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Equazione a variabili separabili

1) Sol. stazionarie: $g(\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2} = 0 \iff \alpha = \pm 1$

2) $\alpha \in (-1, 1)$

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^t 2s\,ds \iff \arcsin(y(t)) - \arcsin(\alpha) = t^2$$

$$\implies \arcsin(y(t)) = \arcsin(\alpha) + t^2$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\iint_D x^2\,dxdy$$

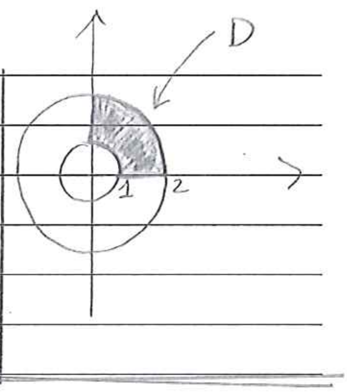
ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ (disegnare il dominio D).

Risoluzione

$$\iint_D x^2\,dxdy = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \cos^2\vartheta\, d\rho\, d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \cdot \frac{1}{2}\Big[\vartheta + \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{15}{16}\pi$$



Esercizio 6

[4 punti]

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)$$

Risoluzione

• $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$,

• $f(x) = 0 \iff x^2 + x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

• $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ (asintoto orizzontale in $\pm\infty$)

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}$

$f'(x) \begin{cases} > 0 \iff x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \\ < 0 \iff x < 1-\sqrt{2} \text{ e } x > 1+\sqrt{2} \end{cases}$