D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 8.1.2013: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (definendo la successione delle ridotte n-sime).

(ii) Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } |q| \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(0) = 2$. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x}$

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2e^x + 2xe^x} = \frac{2}{2} = 1$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n^2 \le a_{n+1}^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora

- a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente
- b $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste finito
- c $\lim_{n\to\infty} \sin(a_n)$ non esiste;
- $\boxtimes$ d Nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) e b) si escludono con $a_n = (-1)^n$ $\forall n$

c) si esclude con $a_n = 1$ $\forall n$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia f derivabile in $x = 0$. Allora

- a $|f|$ é derivabile in $x = 0$
- $\boxtimes$ b $|f|$ é continua in $x = 0$
- c $|f|$ non é derivabile in $x = 0$
- d Esiste $f''(0)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

f derivabile in $x=0 \Rightarrow f$ continua in $x=0$, quindi composizione di funzione continue è continua

Esercizio 3

[3 punti]

Il piano tangente al grafico di $f(x,y) = x\cos(y)$ nell'origine é dato da

- a $z = x$
- b $z = y$
- c $z = x\cos(y)$
- d $z = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f(0,0) = 0$ $\quad f_x(x,y) = \cos(y) \Rightarrow f_x(0,0) = 1$

$\quad f_y(x,y) = -x\sin(y) \Rightarrow f_y(0,0) = 0$

$z = f(0,0) + Df(0,0)(x,y) = x$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) \cdot e^{t+y(t)} + t = 0 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Riportiamo l'equazione in forma normale: $y' = \frac{-t}{e^t} \cdot \frac{1}{e^{y(t)}}$

quindi equazione a variabili separabili

Sol. stazionarie : $g(\alpha) = 0 \iff \frac{1}{e^\alpha} = 0$ (MAI) $\implies$

non ci sono sol. stazionarie

$$\int_\alpha^{y(t)} e^r \, dr = \int_1^t -te^{-t} \, dt \iff$$

$$e^{y(t)} = e^\alpha + e^{-t}(1+t) - 2e^{-1} \iff$$

$$y(t) = \ln\left(e^\alpha + e^{-t}(1+t) - 2e^{-1}\right)$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x}{e^{x^3} - 1}$$

Risoluzione

$$e^{x^3} - 1 \sim x^3$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\sin(\sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4\right)$$

$$= x + x^3\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + o(x^3) \implies$$

$$\sin(\sin(x)) - x \sim -\frac{x^3}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x}{e^{x^3} - 1} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 6 [5 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = -x^3 + x^2 + y^2 - xy^2 + 5x - 4$ e classificarli.

Risoluzione

$$Df(x,y) = \left(-3x^2+2x-y^2+5,\ 2y-2xy\right) \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3x^2+2x-y^2+5=0 \\ 2y(1-x)=0 \Longleftrightarrow y=0,\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 3x^2-2x-5=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{16}}{3} = \begin{cases} +\frac{5}{3} \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y^2-4=0 \end{cases} \Longleftrightarrow y=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Punti critici: $P_1=\left(+\frac{5}{3},0\right)$; $P_2=(-1,0)$; $P_3=(1,2)$; $P_4=(1,-2)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -6x+2 & -2y \\ -2y & 2-2x \end{bmatrix}$$

$$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} -10+2 & 0 \\ 0 & 2-\frac{10}{3} \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \det Hf(P_1)=\frac{32}{3} \\ f_{xx}(P_1)=-8 \end{array}\right\} \text{punto di máx. locale}$$

$$Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \det(Hf(P_1))=3 \\ f_{xx}(P_1)=8 \end{array}\right\} \text{punto di min. loc.}$$

$$Hf(P_3) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det Hf(P_3) \doteq -16<0 \ \Big\}\ \text{punto di sella}$$

$$Hf(P_4) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det Hf(P_3) = -16<0 \ \Big\}\ \text{punto di sella}$$